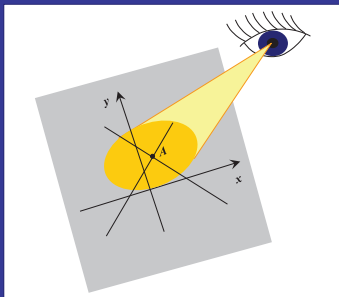


שיטות חשיבה בגיאומטריה אנליטית

(5 יחידות לימוד)

מיכאל בלאוסוב



שיטות חשיבה בגיאומטריה אנליטית (5 יחידות לימוד)

מיכאל בלאוסוב

בעיות רבות בגיאומטריה אנליטית, ברמה של 5 יחידות לימוד, נחשבות בעיני תלמידים ומורים רבים כבעיות קשות מאוד. הספר מציע טכניקות אשר מאפשרות לפתור בעיות אלו בקלות יחסית. בון היתר, בספר הוסבר במפורט והודגם במדויק רבים, כיצד צריך לחשוב ואילו פעולות צריך לבצע כדי לפתור בעיות העוסקות במציאת המשוואות של מקומות גיאומטריים.

כדי לפתור בעיה קשה בגיאומטריה אנליטית אנו נדרשים ללוגיקה ממתח. אחת המטרות של שיטת ההוראה שמתחה על ידי המחבר, היא פיתוח הלוגיקה אצל תלמידים.

כמו הספר שקדם לו, "שיטות חשיבה בהנדסת המישור", אשר יצא לאור ב-2007, גם ספר זה נכתב בסגנון נעים לקריאה ומעניין, והוא מיועד לתלמידי תיכון, למורים ולכל מי שאוהב או רוצה להתאהב במתמטיקה.

חלק ממחקריו של המחבר במתמטיקה מודרנית מורסמו בספרים הבאים:

A. Antonevich, M. Belousov and A. Lebedev. "Functional differential equations: II. C^* -applications. Part 1: Equations with continuous coefficients". *Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics* 94, Longman, 1998, 385 pp. (English)

A. Antonevich, M. Belousov and A. Lebedev. "Functional differential equations: II. C^* -applications. Part 2: Equations with discontinuous coefficients and boundary value problems". *Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics* 95, Longman, 1998, 415 pp. (English)



0 2500000002 7
דאנקוד 250-2

מיכאל בלאוסוב

**שיטות חשיבה
בגיאומטריה אנליטית
(5 יחידות לימוד)**

הוצאת מרחבים חדשים

Thinking Methods and Techniques in Plane Analytic Geometry

(for 5 point high-school students)

Mikhail Belousov

Copyright©2011 by Mikhail Belousov

All rights reserved

Printed in Israel

©2011 כל הזכויות שמורות למחבר

הוצאת מרחבים חדשים טלפון: 050-7498516

www.mikbel.com

עריכת לשון: תמר בנאי, ציפי לוי

אין לשכפל, להעתיק, לצלם, להקליט, לתרגם, לאחסן במאגר מידע, לשדר או לקלוט בכל דרך או בכל אמצעי אלקטרוני, אופטי או מכני או אחר – כל חלק שהוא מהחומר שבספר זה ללא רשות מפורשת בכתב מהמחבר, אלא לשם ציטוט קטעים קצרים בציון שם המחבר. שימוש מסחרי מכל סוג שהוא בחומר הכלול בספר זה אסור בהחלט, אלא ברשות מפורשת בכתב מהמחבר.

מסת"ב: 978-965-91146-1-0 ISBN:

ביוון העתיקה על אחד הסלעים נחקק:

אתה רוצה להיות חזק? ... רוץ!

אתה רוצה להיות יפה? ... רוץ!

אתה רוצה להיות חכם? ... רוץ!

ואם רצת, רצת ... אך בכל זאת קשה לך לפתור בעיות בגיאומטריה אנליטית ברמה של 5 יחידות לימוד – מה תעשה?

קרא ספר זה!

ואם אף על פי שאתה מצליח לפתור בעיה בגיאומטריה אנליטית בכל רמת קושי, כי כבר ראית בעבר את הפתרון המלא של בעיה דומה, תתקל בעתיד בבעיה לא מוכרת – מה תעשה?

קרא ספר זה!

וגם אם אתה פותר בקלות כל בעיה ברמה של 5 יחידות לימוד – מומלץ שתקרא את הספר! גם לך מצפות הפתעות רבות. הספר יקנה לך כלים חדשים שיועילו לך בעתיד. אולי דווקא אתה תמצא בספר את מה שאחרים לא הצליחו לראות.

Ajest's prosperity lies in the ear

Of him that hears it, never in the tongue

Of him that makes it.¹

¹ William Shakespeare, Love's Labour's Lost.

באחד הספרים של המתמטיקאי הדגול בן זמננו, ולדימיר ארנולד, קראתי סיפור שכתב, כפי ששמע אותו מפיו של חתן פרס נובל לפיזיקה יגור תם.

אקדים ואתאר את הרקע ההיסטורי לסיפור, כדי שתובהר כל התמונה. במלחמת האזרחים שהתרחשה ברוסיה בשנים 1917-1923, לחמו כוחות צבא שונים ביניהם גם צבא ההתקוממות האוקראיני המהפכני, שנשא דגל שחור אשר סימל את האנרכיה. חייליו של צבא זה נקראו "מאכנוביסטים", על שמו של נסטור מאכנו שעמד בראש הצבא. רוב ה"מאכנוביסטים" היו איכרים אוקראינים.

ומה לחתן פרס נובל יגור תם ולסיפור זה? בזמן מלחמת האזרחים נפל תם, אז איש צעיר, בשבי ה"מאכנוביסטים". כשחקרו אותו שוביו סיפר שלמד בפקולטה למתמטיקה ולפיזיקה, וכדי לבדוק אם הוא דובר אמת, ביקשו ממנו לפתור בעיה מתורת הטורים. תם פתר את הבעיה וכך ניצלו חייו.

כשסיימתי לקרוא את הסיפור שאלתי את עצמי: כמה מבוגרי האוניברסיטאות של היום היו נשואים בחיים אילו היו נופלים בשבי של צבא איכרים אנרכיסטים אוקראינים, והיו מספרים בחקירה שיש להם תואר אקדמי זה או אחר? ובכלל זה, הס מלהזכיר, את בוגרי התיכון אשר הצליחו במבחני הבגרות וקיבלו את הציון 100, בעיקר בשל אפשרויות הבחירה שהיו במבחן ולא משום שפתרו בעיות קשות. במבחן שעמד בו תם הצעיר הייתה רק בעיה אחת – לא הייתה בו שום בחירה! ה"ציונים" היחידים שיכל לקבל היו מוטים על כף המאזניים – ל"חיים" או "למוות".

כולי תקווה שהקריאה בספר תעזור לכם, קוראיי הנכבדים, להצליח לא רק במבחנים במתמטיקה, אלא גם בכל מבחן אחר הדורש יכולת חשיבה מפותחת.

קריאה מהנה,

ד"ר מיכאל בלאוסוב

תוכן העניינים

9	 הקדמה
13 – 268	 חלק א': הולך את-הַכְּמִים יַחַס
1	שאלות שעשויות לעזור למצוא את הדרך מתוך הספר "שיטות חשיבה בהנדסת
14	 המישור"
2	דרך ישרה
17	
3	דומה, אך שונה
30	
4	באמצע הדרך
38	
5	אחת הדרכים להרכבת משוואות
44	
6	שבע מנות
50	
7	היא בפנים
80	
8	לא מפסיקים לשאול: מה זה אמא? מה זה?
87	
9	ויהי אור
96	
10	מחפשים זווית
101	
11	בין זוויות שוות
109	
12	שיטה של / מקומות גיאומטריים
120	
13	שתי נקודות מבט
134	
14	צועדים במעגלים
142	
15	לגעת במעגל
152	
16	הם יצאו מאותו מקום
157	
17	אחדות היא כוח
169	

183	18. כשהמעגל פגש את הפרבולה
195	19. כבוד האליפסה
198	20. פגישה שנייה עם האליפסה
203	21. פגישה שלישית עם האליפסה
207	22. דואָט של אליפסה והפרבולה
211	23. סיפורן של שתי אסימפטוטות
217	24. כמו שירו של רועה צאן
220	25. הדרך המובילה למשוואת המקום הגיאומטרי
230	26. מקום אחר – אותה שיטה
240	27. עוד מקום, ושוב אותה שיטה
249	28. ליעד הרביעי באותה דרך
258	29. במרחבים רב-ממדיים (יוצאים מן המישור)
262	30. שינויים בכביש
269 – 307	חלק ב': לחכם די בשתי מילים

הקדמה

באחד ממשלי הֶזְנִן בודהיזם מסופר על תלמיד שבא אל מורה זן ושאל :
 "למה לדעתך, אדוני המורה, קיימים אנשים יפים וגם אנשים מכוערים, אנשים חכמים וגם
 אנשים כסילים? למה ה' ברא חלק מהאנשים יפים וחלק מהאנשים מכוערים? הרי אין זה
 בגלל מה שהם עשו בחייהם הקודמים. כיצד אפוא נוצר הבדל זה עוד בשחר ההיסטוריה,
 כאשר עוד לא היה עבר?"

המורה הביא את התלמיד לגן ואמר :

"הנה עץ גדול ולידו עץ קטן. בעבר ישבתי זמן רב מתחת לעצים אלו וחשבתי, למה אחד
 מהם גדול והשני קטן? אך כאשר 'זרקתי' את השכל, נעלמה השאלה. כעת אני יודע שזה עץ
 גדול וזה – קטן. ואין שום בעיה!"

אם אחת ממטרותיו של תלמיד הזן היא ללמוד להשתיק ולנטרל את השכל שלא יפריע לו
 לשקוע בעצמו, אזי על התלמיד הלומד מתמטיקה לפתח את שכלו וללמוד להפעיל אותו
 באופן היעיל ביותר לפתרון בעיות.

ממשל זה למדים שאם השכל לא עובד – אין שאלות! מה לדעתכם קורה בראשו של

תלמיד שלא שואל שאלות?

כידוע, קיים קשר הפוך בין תופעות רבות. לדוגמה, כאשר אתה רגוע נשימתך אטית
 ואילו כאשר אתה מתרגש נשימתך נעשית מהירה; אם אתה מודאג ורוצה להירגע, פעל
 בהתאם לקשר ההפוך שבין מצב הרוח למהירות הנשימה: התחל לנשום לאט. אני ממליץ
 לתלמידים להיעזר בטריק זה בזמן מבחן, כאשר אינם מסוגלים להתרכז מרוב התרגשות.
 כאשר השכל מתאמץ לפתור בעיה מורכבת כלשהי אזי מתעוררות שאלות, ואילו כאשר
 שואלים שאלה, מאלצים את השכל למצוא את התשובה עליה.

כדי שהשכל יפעל בכיוון הנכון צריך לשאול את השאלה הנכונה. אילו שאלות יכולות

לעזור לפתור בעיות בגיאומטריה אנליטית, ברמה של 5 יחידות לימוד?

כדי לקבל תשובה לשאלה זו – עליכם לקרוא את הספר! יש לציין שהשאלות
 המומלצות לשואל, כדי לפתור בעיות בגיאומטריה אנליטית, דומות במידה רבה לשאלות
 שהמלצתי עליהן בספרי "שיטות חשיבה בהנדסת המישור". כך למשל בשני הספרים, גם
 בספרי הקודם הנ"ל וגם בספר נוכחי, נשאלת לעתים קרובות השאלה: "מה ניתן לומר על
 ...?" ובחלק ניכר מן השאלות שאלתי כיצד מבצעים פעולה מסוג מסוים. שימוש בשאלות

אלו הופך את פתרון הבעיה המתמטית למשחק של ניגודים בין "הפרטי" ל"כללי". לנוחות הקוראים צירפתי לספר הנוכחי את הפרק "שאלות שעשויות לעזור למצוא את הדרך" מספרי "שיטות חשיבה בהנדסת המישור".

לאחר ששואלים כיצד מבצעים פעולה מסוג מסוים כלשהו, למשל לאחר ששואלים: "כיצד מוכיחים ששני קטעים מסוימים שווים זה לזה?" או "כיצד מוצאים את השיעורים של נקודה מסוימת?" יש להיזכר בתשובות הקיימות לשאלות אלו, ולבחור מביניהן את התשובה המתאימה לפתרון הבעיה. התשובות האפשריות לשאלות מסוג זה, הקשורות להנדסת המישור, תוכלו למצוא בספרי "שיטות החשיבה בהנדסת המישור", ואת התשובות האפשריות לשאלות הקשורות לגיאומטריה אנליטית, תמצאו בספר הנוכחי. מי שידע להיעזר נכונה בשאלות שלעיל ובתשובות האפשריות עליהן, תקל עליו הדרך למציאת פתרון לבעיה לא מוכרת, שכן הוא יעבור שלבים שונים שיהיו מוכרים לו היטב – ומכאן קצרה הדרך לפתרון. כך גם לגבי מי שישאל את השאלה: "מה זה ... ?" בספרי "שיטות חשיבה בהנדסת המישור" כתבתי: "לעתים, כאשר חושבים על השאלה: 'מה זה?' מקבלים תשובה גם לשאלה: 'כיצד...?'"

בנוסף לשאלות אשר צריך לשאול כדי להגיע אל הפתרון, ובנוסף לתשובות האפשריות על חלק ניכר מהן, המופיעות בספר "שיטות חשיבה בהנדסת המישור", הוצעו לקוראים מספר שיטות נוספות המאפשרות למצוא בקלות פתרונות לבעיות בהנדסת המישור ברמה של 5 יחידות לימוד. בעצם מטרת הספר הייתה להציע טכניקות המאפשרות לפתור מספר רב בעיות כאלו.

מטרת הספר הנוכחי היא להציע טכניקות שבאמצעותן אפשר יהיה לפתור מספר רב של בעיות ברמה של 5 יחידות לימוד בגיאומטריה אנליטית. שימוש בטכניקה משמעו חזרה על אותן פעולות לעתים קרובות. זו הסיבה לכך שגם בספרי הקודם וגם בספר זה מופיעים במקומות רבים אותם ביטויים.

בספרי זה, כמו גם בקודמו - "שיטות חשיבה בהנדסת המישור", אפשר למצוא לא רק את השאלות שצריכות להישאל כדי לפתור בעיה ואת התשובות האפשריות להן, אלא גם שיטות נוספות לפתרון בעיות. לדוגמה, אציג כאן שיטה המאפשרת לפתור בקלות יחסית בעיות רבות למציאת מקומות גיאומטריים, אשר בקרב תלמידים נחשבות לבעיות קשות. יש לציין שלא כל הטכניקות המוצעות בספר הן פרי מחשבתי. חלק מהן מבוססות על מחקריו הנפלאים של המתמטיקאי והמורה הדגול ג'ורג' פוליה (George Polya), ואת חלקן מלמדים זה זמן רב בבתי ספר תיכוניים.

הספר מורכב משני חלקים. חלקו הראשון כולל 30 פרקים, ובו יוסברו בפירוט דרכי החשיבה המובילות לפתרון בעיות בגיאומטריה אנליטית ברמה של 5 יחידות לימוד תוך כדי פתרון. כל הפתרונות שיובאו בחלקו הראשון של הספר מלאים (לעתים קרובות יובאו כמה דרכים לפתרון) ואסביר בו בפירוט כיצד להגיע לכל שלב ושלב בפתרון הבעיה. בחלקו השני אסביר עבור 22 בעיות אילו פעולות יש לבצע ואתן גם את התשובות הסופיות. יתרה מזאת, עבור רוב בעיות בחלק זה ניתנו גם תוצאות ביניים אשר יש לקבל ו/או חלקים של הפתרון.

תודתי ליפעת פרידמן אשר העניקה לספרי זה את אחת הבעיות המופיעות בחלק ב' ולעמי גלעדי אשר מעולם לא אכזב אותי כשביקשתי ממנו להבהיר לי את דברי התנ"ך.

חלק א': הוֹלֵךְ אֶת-הַכָּמִים וְהַחֲפָסִים¹

לדבריו של ההיסטוריון והפילוסוף היווני פלוטארכוס, כשהחליט פעם אחת פיליפוס, מלך מקדון, לעצור ולנוח במקום יפה, התברר לו שאין במקום זה דשא המתאים לחמור. "אלו החיים שלנו", אמר פיליפוס, "אנחנו חיים לפי טעמו של חמור".

איני מוכן להתפשר, כתבתי את הספר רק לאלו שיש לי אתם (או שיהיה לנו בעתיד) טעם דומה בדברים חשובים. "לא עבור חירשים אנו שרים, ענו על כל מילה היעדרות", כתב המשורר הרומי פובליוס ורגיליוס מארו.

¹ משלי, פרק יג "הולך (הולך) אֶת-הַכָּמִים וחכם (וְהַחֲפָסִים)".

1. שאלות שעשויות לעזור למצוא את הדרך מתוך הספר "שיטות חשיבה בהנדסת המישור"

כוונתנו היא לפתור בעיות בעזרת שאלות שנשאל את עצמנו; אנחנו נשאל ונענה לעצמנו - שירות עצמי מלא. למזלנו, את התשובות לשאלות העיקריות ניתן לשאוב מתוך מאגר מוגבל של תשובות, שבו נדון בספר זה.

חלק מהשאלות מתבססות על המלצות המופיעות בספר הנודע "How to solve it", מאת המתמטיקאי הדגול George Polya. הספר תורגם לעברית, וניתן למצוא אותו בספריית האוניברסיטאות, תחת השם "כיצד פותרין?" מאת ג' פויה (התרגום יצא לאור בשנת 1961, בעברית ארכאית. שמו של המחבר תורגם לעברית מהונגרית).

ובכן, השאלות הראשונות אותן יש לשאול על פי פויה, הן: מהו הנעלם? מהו המבוקש? מה נדרש להוכיח? מהם הנתונים? ומהו התנאי? אגב, במקום לשאול על 'הנתונים' ו'התנאי', אנחנו נשאל פשוט "מה נתון בבעיה?".

פויה המליץ לשאול גם: האם אתה מכיר בעיה דומה לזו? אם כן, התוכל להיעזר בה? התוכל להיעזר בשיטת הפתרון לבעיה זו או בתוצאה שלה? וכן: האם עליך להוסיף גורם עזר כלשהו? האם אתה מכיר משפט שעשוי להביא לך תועלת? האם תוכל לנסח את הבעיה בדרך אחרת? האם יש בכוחך לפתור בעיה כללית יותר או פרטית יותר? התוכל לפתור חלק מהבעיה? במהלך חיפוש הפתרון, המליץ פויה לשאול: האם השתמשת בכל הנתונים?

לאחר שפותרים בעיה, יש לשאול, על פי פויה, את השאלות הבאות: האם תוכל לבדוק את התוצאה? האם תוכל לבדוק את ההנמקה? התוכל להשתמש בתוצאה או בשיטה ביחס לפתרון בעיה אחרת?

אין זו הרשימה המלאה של שאלות אותן המליץ פויה לשאול. בספר זה נשתמש רק בחלק מהשאלות הללו (לא בהכרח בניסוח הניתן לעיל). לא נשאל, למשל, שאלות המיועדות להישאל לאחר פתרון בעיה. אתם תשאלו שאלות כאלו בעצמכם, לאחר שתקראו את הפתרונות המופיעים בספר זה. לעומת זאת, במהלך חיפוש הפתרון ניעזר לעתים קרובות בשאלה "האם השתמשנו בכל מה שנתון בבעיה?".

להלן נעסוק בשלוש שאלות אחרות, שהראשונה מביניהן הינה שאלת עזר, המסייעת לנסח את השאלה השנייה. שתי השאלות האחרות הן, לדעתי, שאלות מפתח בהוכחת טענות רבות. ליתר דיוק, לא מדובר כאן בשתי שאלות שונות, אלא בשני סוגים של שאלות, וזאת אסביר בהמשך; כפי שנאמר בקהלת, "לכל דבר זמן ועת לכל חפץ"...

ברוב המקרים, הוכחת טענה מסוימת מתקדמת משלב לשלב, בעזרת שיטות כלליות המאפשרות לפתור קבוצה גדולה של בעיות. מה עליכם לעשות כדי למצוא שיטה מתאימה? ראשית, יש להבין לאיזו קבוצת טענות משתייכת הטענה אותה יש להוכיח, ובהתאם, לנסות להיזכר בשיטות הוכחה של טענות מסוג זה. למטרה זו, עשויה להועיל שאלת הבאה: "כיצד ניתן לנסח את הנאמר בטענה במלים כלליות?". קל יותר למצוא שיטה כללית, כשמשתמשים בביטויים כלליים; התשובה לשאלה ששאלנו, יכולה להיות: "בטענה נאמר, ששתי זוויות מסוימות שוות זו לזו", או "ששני קטעים מסוימים שווים זה לזה" או "ששני ישרים מסוימים מקבילים זה לזה" וכדומה. אם התשובה שנתתם לשאלה הראשונה, היתה "בטענה נאמר ששתי זוויות מסוימות שוות זו לזו", שאלו את השאלה הבאה: "כיצד מוכיחים ששתי זוויות שוות זו לזו?". אם התשובה שנתתם לשאלה הראשונה, היתה "בטענה נאמר ששני קטעים מסוימים שווים זה לזה", שאלו: "כיצד מוכיחים ששני קטעים שווים זה לזה?". כעת יהיה עליכם להיזכר בשיטות המאפשרות להוכיח ששתי זוויות שוות זו לזו, ולבחור מביניהן את השיטה המתאימה למקרה הפרטי שבו אתם עוסקים. ייתכן שהשיטה הראשונה שבה נזכרתם, תביא אתכם לפתרון, אך אין זה בטוח; אם לא הצלחתם לפתור את הבעיה בשיטה שבחרתם, בדקו שיטה נוספת. אפילו אם הצלחתם לפתור את הבעיה בעזרת השיטה הראשונה, לא יזיק לבדוק שיטה נוספת. ייתכן שתמצאו פתרון קצר בהרבה. עליכם לזכור כי עבור רוב סוגי הטענות, קיימות שיטות כלליות רבות להוכחה. בנוסף, טענה מסוימת עשויה להשתייך בו בזמן לסוגים שונים של טענות. כאשר מתייחסים לטענה כשייכת לסוג אחד של טענות, בוחרים שיטת הוכחה מבין השיטות המתאימות לסוג זה, ואילו כאשר מתייחסים לטענה כשייכת לסוג אחר של טענות, בוחרים שיטת הוכחה מבין השיטות המתאימות לסוג האחר..

השאלות "כיצד מוכיחים טענות מסוג זה?", "האם קיים משפט בעזרתו ניתן לקבל את הטענה?", ו"האם קיימת שיטה להוכחת טענות מסוג זה?", עשויות לסמן את הכיוון הנכון שעליו יש לחשוב.

באמצעות השאלות הבאות תוכלו לצמצם את רשימת השיטות, שביניהן תמצאו את זו שאתם זקוקים לה: "מה ניתן לומר על הרכיבים שאותם יש להוכיח?", "מה ניתן לומר על הזוויות בשוויון אותו עלינו להוכיח?" וכדומה. שאלות כאלו יכריחו אתכם להתמקד בפרטים, שיעזרו לכם לבחור את שיטת ההוכחה המתאימה לטענה הנדרשת, בבחינת "לבחור חליפה על פי גזרה"; אם תצליחו לענות על השאלה "מה ניתן לומר על הזוויות בשוויון אותו עלינו להוכיח?", במילים שיאפשרו לכם להבין באיזה סוג (איזו תת-קבוצה) של זוויות מדובר, הרי שזה יעזור לכם לפתור את הבעיה. אם, לדוגמא: לשאלה "מה ניתן לומר על הזוויות בשוויון אותו עלינו להוכיח?", תשיבו כי "הזוויות בשוויון הן זוויות היקפיות", יהיה עליכם לשאול את עצמכם "כיצד מוכיחים ששתי זוויות היקפיות שוות זו לזו?". לאחר שתשאלו שאלה זו, יש סיכוי רב שתגיעו לפתרון.

לעתים, צורת החשיבה היא הפוכה: במקום להתמקד בפרטים, בעזרת שאלות כגון אלה שהצגנו קודם, משתמשים בשיטות כלליות יותר; לדוגמא: אם תצליחו להביע את גודלן של שתי זוויות – לא חשוב מה סוגן – באמצעות אותם פרמטרים, ובשני המקרים תקבלו אותו ביטוי, אזי הזוויות שוות זו לזו. בשיטה זו ניתן להוכיח שוויונים בין אורכי קטעים, בין שטחים ובין גדלים אחרים. שיטה כללית זו להוכחת שוויונים, היא מקרה פרטי של שיטה כללית יותר, לפיה מוכיחים שוויונים בעזרת כלל המעבר "אם $a = b$ ו- $b = c$, אז $a = c$ ".

לעתים, השאלות "האם אתה מכיר בעיה דומה לזו?", "התוכל להיעזר בה?", "התוכל להיעזר בשיטת הפתרון שלה?", ו"התוכל להיעזר בתוצאה שלה?" (על פי הספר הנ"ל של פויה), משפיעות על הנשאלים באותו אופן כמו השאלה "כיצד מוכיחים...?". זכרו כי כל שאלה שתשאלו, תכוון את מחשבותיכם בכיוון מסוים. לכן חשוב מה שואלים, מתי שואלים, ו...מתי לא שואלים.

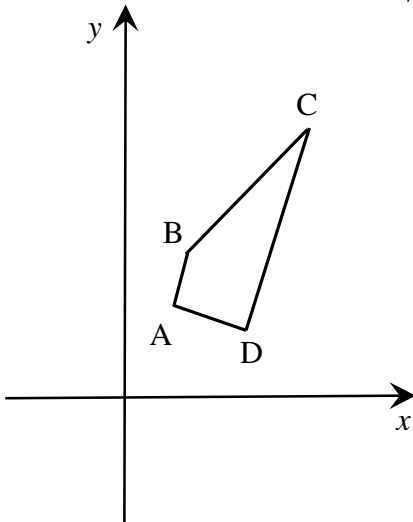
2. דרך ישרה

...and with its feet cuts through the path it follows.

(Rig Veda¹, tr. by Ralph T.H. Griffith)

בעיה

נתון מרובע $ABCD$ (ראו ציור). משוואות הצלעות² של המרובע הן $8x - 3y + 8 = 0$,
 $4x - 3y + 16 = 0$ ו- $8x + 15y - 100 = 0$, $8x - 3y - 18 = 0$.
 נקודה E היא אמצע הצלע BC . מצאו את שיעורי הנקודה E .



דרך החשיבה ופתרון

מה צריך למצוא?

צריך למצוא את השיעורים של נקודה E . על פי הנתון הנקודה היא אמצע הצלע BC

במרובע $ABCD$.

כיצד מוצאים את השיעורים של אמצע קטע?

לפתרון בעיות מסוג זה נעזרים במשפט שלפיו: אם נקודה $M(x_M, y_M)$ היא אמצע

הקטע המחבר את הנקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) , אז מתקיים:

¹ אוסף של המנונים הודיים עתיקים.

² מכאן ואילך כאשר נאמר "משוואת הצלע של מצולע" הכוונה ל"משוואת הישר שעליו נמצאת הצלע של המצולע".

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

לפי משפט זה מתקיים

$$, x_E = \frac{x_B + x_C}{2} \quad (1)$$

$$. y_E = \frac{y_B + y_C}{2} \quad (2)$$

אם נצליח למצוא את השיעורים של נקודות B ו- C , נוכל לקבל בעזרת שני השוויונים האחרונים גם את השיעורים של נקודה E .
בניסיון למצוא את השיעורים של נקודה B נשאל את עצמנו: מה אפשר לומר על נקודה זו?

הנקודה היא נקודת החיתוך של הישרים AB ו- BC .
כיצד מוצאים את השיעורים של נקודת החיתוך של שני ישרים במישור? ובכלל: כיצד מוצאים את הנקודות המשותפות לשני קווים במישור?
את הנקודות המשותפות לשני קווים מוצאים כך: מוצאים את משוואות הקווים (אם הן לא ידועות), ופותרים את מערכת המשוואות המורכבת מהן.
כדי להסביר למה פתרונות של מערכת המשוואות הם זוגות השיעורים של נקודות משותפות לשני הקווים עלינו להבהיר קודם מהי משוואה של קו.

משוואה של קו ℓ במישור היא משוואה עם הנעלמים x ו- y המקיימת את שני התנאים הבאים:

- (א) השיעורים של כל נקודה המונחת על הקו ℓ מקיימים את המשוואה,
(ב) השיעורים של כל נקודה שאינה מונחת על הקו ℓ לא מקיימים את המשוואה.
את הטענה "משוואה $F(x, y) = 0$ היא משוואה של הקו ℓ " אפשר לנסח גם במילים הבאות: "המשוואה $F(x, y) = 0$ מייצגת את הקו ℓ ". את הביטוי: " ℓ הוא קו המיוצג על ידי המשוואה $F(x, y) = 0$ "³ אפשר לרשום כך:

³ במקרים רבים במקום ביטוי זה משתמשים בביטוי " ℓ הוא מקום גיאומטרי של נקודות המקיימות את המשוואה $F(x, y) = 0$ ".

$$\ell : F(x, y) = 0$$

לעתים קרובות במקום לומר: "הקו המיוצג על ידי המשוואה $F(x, y) = 0$ ", אומרים פשוט: "הקו $F(x, y) = 0$ ".

כעת, כאשר אנו יודעים מה היא משוואה של קו, אפשר להבהיר את הנאמר לעיל על נקודות משותפות לשני ישרים. נעשה זאת בדוגמה הבאה: נחפש את השיעורים של נקודת החיתוך של הישרים הבאים: $\ell_1: 2x - 3y - 5 = 0$ ו- $\ell_2: 3x + 2y - 1 = 0$.

נקודה $N(x_N, y_N)$ היא נקודת החיתוך של הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 אם, ורק אם, היא מונחת על כל אחד מישרים אלו. כלומר – אם, ורק אם, שיעוריה מקיימים את המשוואה $2x - 3y - 5 = 0$ של הקו ℓ_1 וגם את המשוואה $3x + 2y - 1 = 0$ של הקו ℓ_2 . כלומר נקודה $N(x_N, y_N)$ היא נקודת החיתוך של ישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 אם, ורק אם, מתקיים:

$$2x_N - 3y_N - 5 = 0$$

וכמו כן מתקיים:

$$3x_N + 2y_N - 1 = 0$$

וכיצד נקרא זוג המספרים הסדור (x_N, y_N) המקיים את המשוואה $2x - 3y - 5 = 0$ וגם את המשוואה $3x + 2y - 1 = 0$?

זוג המספרים הסדור המקיים את המשוואה $2x - 3y - 5 = 0$ וגם את המשוואה $3x + 2y - 1 = 0$ נקרא פתרון מערכת המשוואות

$$\begin{cases} 2x - 3y - 5 = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

פתרו את מערכת המשוואות האחרונה בעצמכם בתור תרגיל. עליכם לקבל את התשובה: $(1, -1)$. מכאן: $N(1, -1)$.

נחזור לבעיה שעלינו לפתור בפרק זה. אמרנו קודם לכן שאם נצליח למצוא את השיעורים של הקודקודים B ו- C של המרובע $ABCD$, נוכל לקבל את השיעורים של נקודה E בעזרת השוויונים (1) ו-(2).

אמרנו גם כי הנקודה B היא נקודת החיתוך של הישרים AB ו- BC .

על פי הנתון משוואות הישרים שעליהם נמצאות צלעות המרובע $ABCD$ הן

$$4x - 3y + 16 = 0 \text{ ו- } 8x + 15y - 100 = 0, \quad 8x - 3y - 18 = 0, \quad 8x - 3y + 8 = 0 \quad (3)$$

אם נדע איזו ממשוואות אלו היא משוואה של הישר AB ואיזו היא של הישר BC , אז כדי למצוא את השיעורים של נקודה B נצטרך רק לפתור את מערכת המשוואות המורכבת ממשוואות הישרים AB ו- BC . בנוסף אם נדע גם איזו מהמשוואות בשורה (3) היא משוואת הישר CD , אז כדי למצוא את השיעורים של הנקודה C יהיה עלינו לפתור את מערכת המשוואות המורכבת ממשוואות הישרים BC ו- CD , מכיוון שהנקודה C היא נקודת החיתוך של ישרים אלו.

נתבונן במשוואות הצלעות של המרובע $ABCD$. כולן מן הצורה: $ax + bx + c = 0$.

משוואה $ax + bx + c = 0$ שבה לפחות אחד המקדמים a ו- b שונה מאפס נקראת משוואה כללית של קו ישר.⁴

כאשר פותרים בעיות בגיאומטריה אנליטית לעתים קרובות ישנו צורך למצוא משוואה כללית של קו ישר זה או אחר, אך לפתרון הבעיה נוכחית נצטרך למצוא משוואות מפורשות של צלעות המרובע $ABCD$.

מהי משוואה מפורשת של קו ישר?

המשוואה המפורשת של קו ישר היא משוואה של הקו אשר נכתבת כך:

$$y = mx + n \quad (4)$$

משוואה מן הצורה הזו קיימת עבור כל ישר שאינו מאונך לציר ה- x . גם ההפך הוא נכון: כל משוואה מן הצורה (4) מייצגת קו ישר שאינו מאונך לציר ה- x .

כדי שנוכל לפתור את הבעיה, עלינו לדעת מהי המשמעות של מקדם m ומהי המשמעות של האיבר החופשי n במשוואה זו.

האיבר החופשי n במשוואה (4) שווה לשיעור ה- y של נקודת החיתוך של הישר ℓ המיוצג ידי משוואה זו עם ציר ה- y .⁵

⁴ במקום לכתוב: "לפחות אחד מהמקדמים a ו- b שונה מאפס" אפשר לכתוב: $a^2 + b^2 \neq 0$

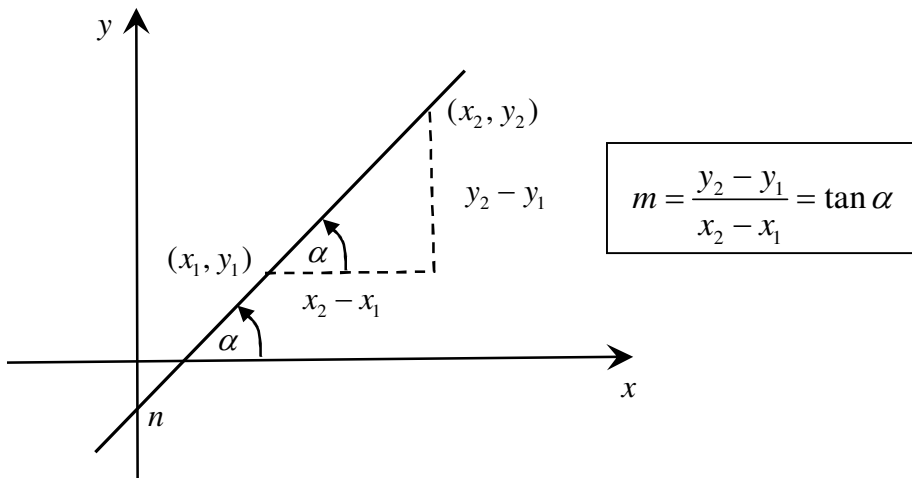
ומה ידוע על מקדם m של x במשוואה (4) ?

ידוע שעבור כל שתי נקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) המונחות על ישר ℓ מתקיים :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (5)$$

נסמן ב- α את הזווית הקטנה ביותר שבה צריך לסובב את ציר ה- x או ישר מקביל לו בכיוון נגדי לכיוון שבו נעים מחוגי השעון עד שיתלכד עם הישר ℓ הנ"ל. הזווית נקראת הזווית בין הישר ℓ לכיוון החיובי של ציר ה- x . על סמך שוויון (5) אפשר להסיק שמתקיים :

$$m = \tan \alpha \quad (6)$$



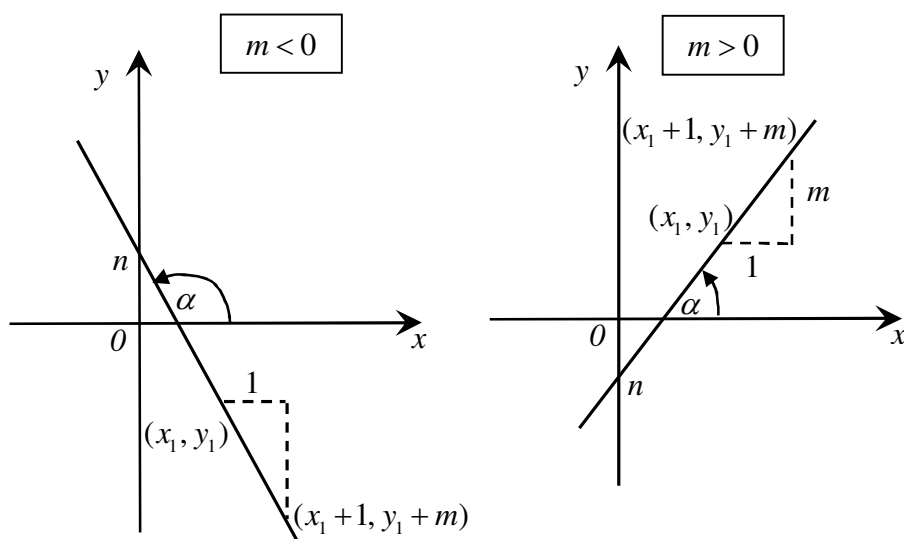
לכן למקדם m של x במשוואה (4) קוראים **שיפוע של הקו הישר ℓ** (בספרים רבים מגדירים קודם את השיפוע של קו ישר בעזרת נוסחה (6) ורק לאחר מכן מוכיחים את שוויון (5) וכי משוואה (4) מייצגת את הקו הישר).

על סמך שוויון (5) אפשר גם להסיק כי השיפוע של קו ישר הוא המהירות שבה משתנה שיעור ה- y של נקודה המונחת על הישר כאשר שיעור ה- x שלה משתנה. אם נניע נקודה שרירותית המונחת על הישר לאורכו משמאל לימין, בכל פעם ששיעור ה- x של הנקודה

⁵ אם נציב במשוואה האחרונה את $x = 0$, נקבל $y = n$.

יגדל ביחידה אחת, ישתנה שיעור ה- y שלה ב- m יחידות⁶; עם זאת, במקרה ששיפוע הישר חיובי ($m > 0$), יגדל שיעור ה- y של הנקודה ב- m יחידות, ואילו במקרה ששיפוע הישר שלילי ($m < 0$), יקטן שיעור ה- y שלה ב- m יחידות.

אם $m = 0$, שיעור ה- y של הנקודה המונחת על הישר לא ישתנה, לא חשוב כיצד נשנה את שיעור ה- x שלה. כדי לפתור בעיות רבות צריך לדעת שאם שיפוע שווה ל- 0 , אז הישר מקביל לציר ה- x או מתלכד עמו, ולהפך: אם ישר מקביל לציר ה- x או מתלכד עמו, אז השיפוע של הישר שווה ל- 0 .



משוויון (6) נובע כי מתקיים:

$$m > 0 \Leftrightarrow 0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

$$m < 0 \Leftrightarrow 90^\circ < \alpha < 180^\circ$$

כעת נוכל להסיק מסקנות ראשונות על אודות הישרים המיוצגים על ידי משוואות

$$4x - 3y + 16 = 0 \text{ ו- } 8x + 15y - 100 = 0, \quad 8x - 3y - 18 = 0, \quad 8x - 3y + 8 = 0$$

⁶ על סמך שוויון (5) מסיקים שאם עבור הנקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) הנ"ל מתקיים: $x_2 - x_1 = 1$, אז מתקיים: $y_2 - y_1 = m$.

(משוואות אלה הופיעו בשורה (3) לעיל). נמצא קודם את המשוואות המפורשות של ישרים אלה. לשם כך, בכל אחת מארבע המשוואות האחרונות נבודד את y . נקבל:

$$y = \frac{8}{3}x + \frac{8}{3} \quad (7)$$

$$y = \frac{8}{3}x - 6 \quad (8)$$

$$y = -\frac{8}{15}x + \frac{20}{3} \quad (9)$$

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{16}{3} \quad (10)$$

כעת נתבונן בצלעות המרובע $ABCD$, וליתר דיוק, בישרים שעליהם הצלעות מונחות. כל אחד מהישרים AB , BC ו- CD יוצר זווית חדה עם הכיוון החיובי של ציר ה- x . רק הישר AD יוצר זווית קהה עם כיוון זה. לכן רק השיפוע של הישר AD קטן מ-0. שיפועי הישרים AB , BC ו- CD גדולים מ-0.

נחזור למשוואות המפורשות של הישרים שעליהם נמצאות צלעות המרובע $ABCD$. רק השיפוע של הישר שמשוואתו (9) קטן מ-0. שיפועי הישרים שמשוואותיהם (7), (8) ו-(10) גדולים מ-0.
מכאן:

$$\text{המשוואה המפורשת של הישר } AD \text{ היא } y = -\frac{8}{15}x + \frac{20}{3}.$$

נסכים שבמקרה שיהיה צורך להדגיש שמדובר בישר AD (לדוגמה) ולא בקטע AD , נסמן את הישר ב- ℓ_{AD} . כעת נוכל לרשום את המסקנה שהסקנו בנוגע לישר AD בצורה זו:

$$\ell_{AD} : y = -\frac{8}{15}x + \frac{20}{3}$$

עלינו עוד לקבוע איזו מן המשוואות (7), (8) ו-(10) מייצגת איזה מן הישרים AB , BC ו- CD .

מה אפשר לומר על משוואות (7) ו-(8)?

המקדמים של x במשוואות אלה שווים זה לזה. במילים אחרות:

(11) השיפוע של הישר שמשוואתו (7) שווה לשיפוע של הישר שמשוואתו (8).

ועוד אפשר להבחין כי

(12) האיבר החופשי במשוואה (7) גדול מהאיבר החופשי במשוואה (8).

מה ידוע על ישרים ששיפועיהם שווים זה לזה?

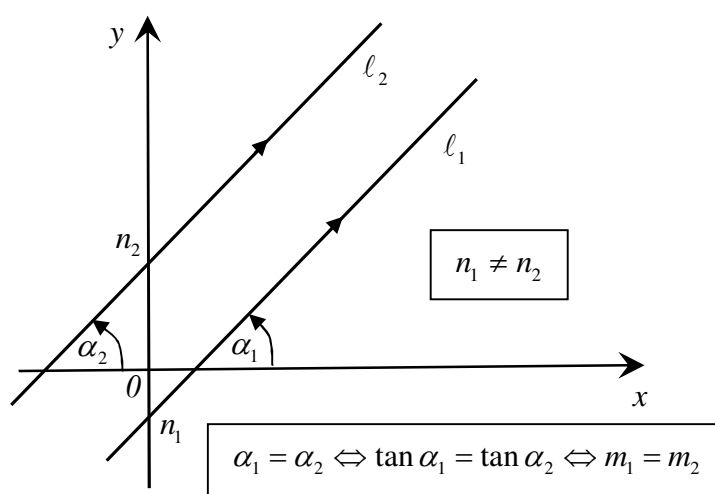
ידוע ש-

(13) אם שיפוע m_1 של הישר $\ell_1: y = m_1x + n_1$ שווה לשיפוע m_2 של הישר $\ell_2: y = m_2x + n_2$ ומתקיים $n_1 \neq n_2$, אז הישרים מקבילים זה לזה.

גם ההפך נכון:

(14) אם ישרים $\ell_1: y = m_1x + n_1$ ו- $\ell_2: y = m_2x + n_2$ מקבילים זה לזה, אז $m_1 = m_2$ ו- $n_1 \neq n_2$.

הציור להלן הוא איור לדרך שבה מוכיחים את טענות (13) ו-(14).



נציין כי טענה (13) שקולה לטענה הבאה:

$$(15) \quad \begin{array}{l} \text{אם השיפוע } m_1 \text{ של הישר } \ell_1 : y = m_1x + n_1 \text{ שווה לשיפוע } m_2 \text{ של} \\ \text{הישר } \ell_2 : y = m_2x + n_2 \text{ אז } n_1 = n_2, \text{ אז הישרים לא מקבילים זה לזה.} \end{array}$$

למי שמתקשה להבין למה טענה (15) שקולה לטענה (13) (כלומר למה $(15) \Rightarrow (13)$ ו- $(13) \Rightarrow (15)$) מומלץ לקרוא את פרק 19 בספרי "שיטות חשיבה בהנדסת המישור". הפרק, שנקרא "לא ולא", מוקדש לכמה חוקים של לוגיקה מתמטית. נבהיר רק שאם מתקיים: $m_1 = m_2$ וגם $n_1 = n_2$, אז הישרים $\ell_1 : y = m_1x + n_1$ ו- $\ell_2 : y = m_2x + n_2$ מתלכדים זה עם זה, ואילו אם מתקיים $m_1 \neq m_2$, הישרים נחתכים.

כעת נוכל להסיק מסקנות מטענות (11) ו-(12). מטענות אלו נובע כי

$$(16) \quad \text{ישר (7) מקביל לישר (8).}$$

ויתרה מזאת,

$$(17) \quad \text{ישר (7) נמצא כולו מעל ישר (8).}$$

הרי האיבר החופשי במשוואה מפורשת של קו ישר שווה לשיעור ה- y של נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y ; לכן מטענה (12) נובע כי נקודת החיתוך של ישר (7) עם ציר ה- y מונחת על הציר האחרון גבוה יותר מאשר נקודת החיתוך של ישר (8) עם ציר זה.

כעת הוכיחו בעצמכם כי

$$(18) \quad \text{הישרים (7) ו-(10) נחתכים.}$$

וגם

$$(19) \quad \text{הישרים (8) ו-(10) נחתכים.}$$

הבה נתבונן בישרים AB , BC ו- CD . משוואות (7), (8) ו-(10) הן משוואות של ישרים אלה, אך עדיין לא ידוע איזו משוואה מייצגת איזה ישר.

על סמך הטענות (16), (18) ו-(19) מסיקים כי רק זוג אחד של ישרים מבין הישרים AB , BC ו- CD הוא זוג של ישרים המקבילים זה לזה. כל זוג אחר שנבחר משלישיית הישרים AB , BC ו- CD הוא זוג של ישרים נחתכים.

אילו מן הישרים AB , BC ו- CD מקבילים זה לזה?
 לרשותנו שלוש אפשרויות:

$$AB \parallel BC \quad (20)$$

$$BC \parallel CD \quad (21)$$

$$AB \parallel CD \quad (22)$$

לישרים AB ו- BC יש נקודה משותפת – הנקודה B . גם לישרים BC ו- CD יש נקודה משותפת – הנקודה C . לכן

$$\text{הישרים } AB \text{ ו- } BC \text{ נחתכים} \quad (23)$$

וגם

$$\text{הישרים } BC \text{ ו- } CD \text{ נחתכים.} \quad (24)$$

קיבלנו כי

טענות (20) ו-(21) לא מתקיימות.

נותרה אפשרות אחת

טענה (22) מתקיימת.

נציין כי שיטת החשיבה שבאמצעותה הסקנו כי $AB \parallel CD$ נקראת **שיטת ההשמטה**.
 קיבלנו לעיל כי בין הישרים המיוצגים על ידי משוואות (7), (8) ו-(10) יש זוג אחד ויחיד של ישרים מקבילים זה לזה: ישרים (7) ו-(8). מכאן ומטענות (22), (23) ו-(24) נובע כי

$$\begin{aligned} &\text{משוואת אחד הישרים } AB \text{ ו- } CD \text{ היא משוואה (7), ומשוואת} \\ &\text{הישר השני היא משוואה (8).} \end{aligned} \quad (25)$$

נתבונן בציר המרובע $ABCD$ (עמוד 17). לפי הציר

$$\text{הישר } AB \text{ נמצא מעל הישר } CD \quad (26)$$

מטענות (17), (25) ו-(26) נובע כי

משוואה (7) היא משוואת הישר AB ,

ואילו

משוואה (8) היא משוואת הישר CD .

קיבלנו כי

$$\ell_{AB} : y = \frac{8}{3}x + \frac{8}{3} \quad (27)$$

$$\ell_{CD} : y = \frac{8}{3}x - 6$$

הבה ניזכר, קיבלנו קודם כי המשוואות המפורשות של צלעות המרובע $ABCD$ הן משוואות (7) עד (10)⁷. לאחר מכן קיבלנו כי משוואה (9) היא משוואה של הישר AD , וכעת קיבלנו כי משוואה (7) היא משוואת הישר AB ומשוואה (8) היא משוואת הישר CD .

ובכן, איזו מהמשוואות (7) עד (10) היא המשוואה של הישר BC ?
לא נותר אלא להסיק כי

משוואה (10) היא משוואת הישר BC .

כלומר

$$\ell_{BC} : y = \frac{4}{3}x + \frac{16}{3} \quad (28)$$

השתמשנו שוב בשיטת ההשמטה. מצאנו בעזרתה את המשוואה המפורשת של הישר BC .
נפתור את המערכת

$$\begin{cases} y = \frac{8}{3}x + \frac{8}{3} \\ y = \frac{4}{3}x + \frac{16}{3} \end{cases} \quad (29)$$

המורכבת ממשוואה (7) של הישר AB וממשוואה (10) של הישר BC . פתרונה הוא זוג השיעורים של נקודה B .

⁷ כלומר משוואות (7), (8), (9) ו-(10).

מערכת המשוואות האחרונה שקולה למערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} \frac{4}{3}x + \frac{16}{3} = \frac{8}{3}x + \frac{8}{3} \\ y = \frac{4}{3}x + \frac{16}{3} \end{cases} \quad (30)$$

נפתור את המשוואה הראשונה במערכת האחרונה:

$$\frac{4}{3}x + \frac{16}{3} = \frac{8}{3}x + \frac{8}{3} \Leftrightarrow 4x + 16 = 8x + 8 \Leftrightarrow -4x = -8 \Leftrightarrow x = 2$$

נציב את $x = 2$ במשוואה השנייה של מערכת (30), ונקבל

$$y = \frac{4}{3} \cdot 2 + \frac{16}{3} \Leftrightarrow y = \frac{24}{3} \Leftrightarrow y = 8$$

זוג המספרים הסדור $(2, 8)$ הוא הפתרון (פתרון יחיד) של מערכת המשוואות (29). מכאן

$$. B(2, 8) \quad (31)$$

נפתור את המערכת

$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}x + \frac{16}{3} \\ y = \frac{8}{3}x - 6 \end{cases} \quad (32)$$

המורכבת ממשוואה (10) של הישר BC וממשוואה (8) של הישר CD . פתרונה הוא זוג

השיעורים של נקודה C .

מערכת המשוואות האחרונה שקולה למערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}x + \frac{16}{3} \\ \frac{4}{3}x + \frac{16}{3} = \frac{8}{3}x - 6 \end{cases} \quad (33)$$

נפתור את המשוואה השנייה במערכת המשוואות האחרונה:

$$\frac{4}{3}x + \frac{16}{3} = \frac{8}{3}x - 6 \Leftrightarrow 4x + 16 = 8x - 18 \Leftrightarrow -4x = -32 \Leftrightarrow x = 8$$

נציב את $x = 8$ במשוואה הראשונה של מערכת (33), ונקבל

$$y = \frac{4}{3} \cdot 8 + \frac{16}{3} \Leftrightarrow y = \frac{32}{3} + \frac{16}{3} \Leftrightarrow y = \frac{48}{3} \Leftrightarrow y = 16$$

זוג המספרים הסדור (8,16) הוא הפתרון (פתרון יחיד) של מערכת משוואות (32). מכאן

$$C(8,16) \quad (34)$$

נציב בשוויונים (1) ו-(2) על פי השורות (31) ו-(34), ונקבל

$$x_E = \frac{2+8}{2} = 5$$

$$y_E = \frac{8+16}{2} = 12$$

כלומר $E(5,12)$. מש"ל.

3. דומה, אך שונה

משפט. כל תנין ארוך יותר מאשר הוא רחב.

משפט העזר הראשון. כל תנין ארוך יותר מאשר הוא ירוק.

הוכחה. כל תנין ארוך מלמעלה ומלמטה, אך ירוק הוא רק מלמעלה. לכן הוא יותר ארוך מאשר הוא ירוק. **מש"ל.**

משפט העזר השני. כל תנין ירוק יותר מאשר הוא רחב.

הוכחה. כל תנין ירוק לאורך ולרוחב, אך רחב הוא רק לרוחב. לכן הוא ירוק יותר מאשר הוא רחב. **מש"ל.**

כעת כדי להוכיח שכל תנין ארוך יותר מאשר הוא רחב נותר רק להיעזר בשני משפטי העזר ובכלל המעבר עבור אי-שוויונים, ולפיו: אם $a > b$ ו- $b > c$, אז $a > c$.
(פולקלור סטודנטיים).

אני מקווה שבדיחה זו גרמה לכם לצחוק, או לפחות לחיך, אך כאשר מישו מנסח ומוכיח במלוא הרצינות טענה כלשהי באופן שמזכיר לי את הבדיחה לעיל - אינני יודע אם לצחוק או לבכות. מעציב אותי לחשוב שהוא בטוח שפעל לפי כל הכללים ושנימוקיו ללא רבב. אינני מדבר רק על תלמידים. צורך בהבנה ובבנייה של שרשרת נימוקים קיים לא רק כאשר לומדים במוסד כלשהו להשכלה, הוא קיים לאורך כל החיים.

בנוגע לתלמידים הלומדים מתמטיקה ברמת בגרות של 5 יח"ל, להם צריכה להיות יכולת לבנות שרשרת נימוקים ארוכה. לא נולדים עם יכולת זו, רוכשים אותה. כיצד?

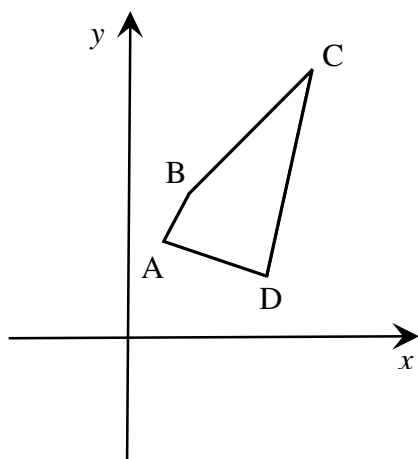
התשובה לשאלה ששאלנו היא דבריו שלמה המלך: **"הלוח (הולך) את-הַכָּמִים וחכם (יִחְכֵּם)".** לומדים לחשוב מן הטובים בכך, לא רק מן הטובים שבינינו אלא גם מן הטובים שחיו פעם: קוראים את ספריהם, וכשנתקלים בשרשרת נימוקים ארוכה לא מדלגים עליה, לומדים ממנה, וגם מתרגלים.

בעיה

נתון מרובע $ABCD$ (ראו ציור). משוואות הצלעות של המרובע הן $8x - 3y + 8 = 0$, $3x - y - 8 = 0$, $8x + 15y - 100 = 0$ ו- $4x - 3y + 16 = 0$.

נקודה E היא אמצע הצלע BC .

מצאו את שיעורי הנקודה E .

**דרך החשיבה ופתרון**

האם יש הבדל כלשהו בין הבעיה אשר פתרנו בפרק הקודם לבין הבעיה שיש לפתור בפרק הנוכחי? ואם ישנו הבדל - מהו?

כן, יש הבדל. אחת ממשוואות הישרים אשר היו נתונות בבעיה הקודמת, המשוואה $8x - 3y - 18 = 0$, הוחלפה בפרק זה במשוואה $3x - y - 8 = 0$.

נוסף על כך, אם נתבונן היטב בציור המרובע $ABCD$ בפרק זה נוכל להבחין כי צלעותיו AB ו- CD אינן נראות כעת מקבילות זו לזו. אבל אולי זה רק נדמה? נברר בהמשך.

כמו בבעיה הקודמת, נבודד את ה- y בכל אחת מהמשוואות הנתונות. נקבל את המשוואות המפורשות הבאות של הישרים שעליהם נמצאות צלעות המרובע $ABCD$:

$$y = \frac{8}{3}x + \frac{8}{3} \quad (1)$$

$$y = 3x - 8 \quad (2)$$

$$y = -\frac{8}{15}x + \frac{20}{3} \quad (3)$$

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{16}{3} \quad (4)$$

המקדמים של ה- x במשוואות שקיבלנו שונים זה מזה. כלומר שיפועי הישרים AB , BC , CD ו- AD שונים זה מזה. מכאן אין בין הישרים אף זוג של ישרים מקבילים זה לזה.

כעת אנו בטוחים שבבעיה הנוכחית הישרים AB ו- CD לא מקבילים זה לזה. לכן הנימוקים בפתרון הבעיה נוכחית יהיו שונים במידה רבה מהנימוקים בפתרון הבעיה הקודמת.

בינתיים נוכל לבחון את הדברים הבאים בדומה לדרך החשיבה בפרק הקודם: כמו קודם נשים לב כי רק שיפוע הישר המיוצג על ידי משוואה (3) קטן מ-0 ואילו שיפועי הישרים המיוצגים על ידי משוואות (1), (2) ו-(4) גדולים מ-0; נתבונן בציור לעיל ונבחין כי רק הישר AD יוצר זווית קהה עם הכיוון החיובי של ציר ה- x , ואילו הישרים AB , BC ו- CD יוצרים זוויות חדות עם כיוון זה. מכאן נסיק כי

משוואה (3) מייצגת את הישר AD

ואילו

(5) *משוואות (1), (2) ו-(4) מייצגות את הישרים AB , BC ו- CD אך עדיין לא ידוע איזו מהמשוואות (1), (2) ו-(4) מייצגת איזה מהישרים).*

כעת עלינו לקבוע איזו מהמשוואות (1), (2) ו-(4) מייצגת איזה מהישרים AB , BC ו- CD .

לא נוכל לפתור את הבעיה האחרונה בדרך שבה פתרנו בעיה דומה בפרק הקודם. ובכל זאת, אם אי אפשר להשיג את המבוקש בדרך אחת, אין משמעו שאי אפשר להשיגו בדרך אחרת או אפילו בכמה דרכים שונות.

נשאל את עצמנו: מה הם שיפועי הישרים המיוצגים על ידי המשוואות (1), (2) ו-(4)?

(6) *שיפועי הישרים המיוצגים על ידי המשוואות (1), (2) ו-(4) שווים בהתאמה ל- $\frac{8}{3}$, ל-3 ול- $\frac{4}{3}$.*

עבור שלושת המספרים האחרונים מתקיים:

$$3 > \frac{8}{3} > \frac{4}{3} \quad (7)$$

נסמן ב- m_{AB} , m_{BC} ו- m_{CD} את שיפועי הישרים AB , BC ו- CD בהתאמה.

מטענות (5) ו- (6) נובע כי

$$(8) \quad \begin{aligned} &\text{אחד המספרים } m_{AB}, m_{BC} \text{ ו- } m_{CD} \text{ שווה ל- } \frac{8}{3}, \text{ שני ל- } 3 \text{ ושלישי ל-} \\ &\frac{4}{3}. \text{ (אך עדיין איננו יודעים איזה מהמספרים } m_{AB}, m_{BC} \text{ ו- } m_{CD} \text{ שווה} \\ &\text{לאיזה מהמספרים } \frac{8}{3}, 3 \text{ ו- } \frac{4}{3}). \end{aligned}$$

אם מבין כל שניים מהמספרים m_{AB} , m_{BC} ו- m_{CD} נצליח לקבוע לפי ציור המרובע

$ABCD$ איזה מהם גדול יותר, אז בהסתמך על טענות (7) ו- (8) נוכל למצוא את שיפועי הישרים AB , BC ו- CD . לאחר מכן נוכל לקבוע איזו מהמשוואות (1), (2) ו- (4) מייצגת איזה מהישרים AB , BC ו- CD .

כיצד אפשר להבחין לפי ציור איזה שיפוע מבין שיפועיהם של שני ישרים שאינם מאונכים

לציר ה- x ואינם מקבילים זה לזה הוא גדול יותר?

בפרק הקודם למדנו ששיפוע של ישר היוצר זווית חדה עם הכיוון החיובי של ציר ה- x

גדול מ- 0 ואילו שיפוע של ישר היוצר זווית קהה עם כיוון החיובי של ציר ה- x קטן מ- 0. מכאן

שיפוע של ישר היוצר זווית חדה עם כיוון החיובי של ציר ה- x גדול משיפוע

של ישר היוצר זווית קהה עם כיוון זה.

וכיצד אפשר לקבוע לפי ציור איזה שיפוע מבין שיפועיהם של שני ישרים שאינם מאונכים

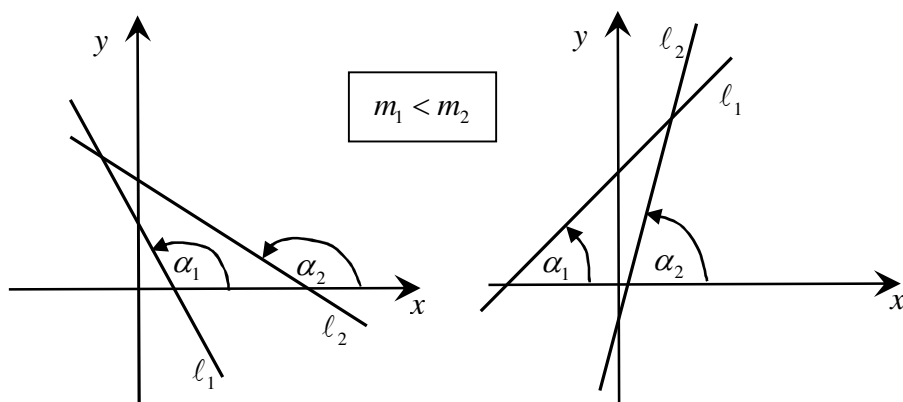
לציר ה- x ואינם מקבילים זה לזה גדול יותר במקרה שהזוויות אשר יוצרים שני הישרים

עם הכיוון החיובי של ציר ה- x שתיהן חדות או שתיהן קהות?

אם הזוויות אשר יוצרים שני ישרים עם הכיוון החיובי של ציר ה- x שתיהן חדות או שתיהן קהות, אז השיפוע של הישר היוצר עם כיוון החיובי של ציר ה- x זווית גדולה יותר – גדול יותר.

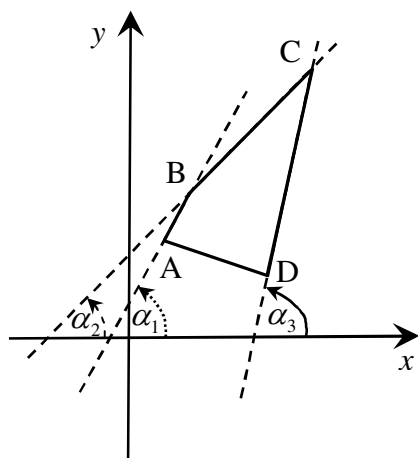
(9)

אכן, אם הישרים $\ell_1: y = m_1x + n_1$ ו- $\ell_2: y = m_2x + n_2$ יוצרים עם הכיוון החיובי של ציר ה- x את הזוויות α_1 ו- α_2 בהתאמה ומתקיים $0^\circ < \alpha_1 < \alpha_2 < 90^\circ$ או $90^\circ < \alpha_1 < \alpha_2 < 180^\circ$, אז $\tan \alpha_1 < \tan \alpha_2$. מכאן ומהשוויונים $m_1 = \tan \alpha_1$ ו- $m_2 = \tan \alpha_2$ נובע כי $m_1 < m_2$ ¹.



כעת, כשידוע לנו כיצד להבחין לפי ציור איזה שיפוע מבין שיפועיהם של שני ישרים שאינם מאונכים לציר ה- x ואינם מקבילים זה לזה הוא גדול יותר, נוכל לקבוע עבור כל שניים מהמספרים m_{AB} , m_{BC} ו- m_{CD} איזה מביניהם גדול יותר.

¹ אפשר לנמק את טענה (9) גם בהסתמך על כך ששיפוע של ישר הוא המהירות שבה משתנה שיעור ה- y של הנקודה הנמצאת על הישר כאשר שיעור ה- x שלה משתנה. אם $0^\circ < \alpha_1 < \alpha_2 < 90^\circ$, אז מספר היחידות שבהן גדל שיעור ה- y של הנקודה הנמצאת על הישר ℓ_2 כאשר שיעור ה- x שלה גדל ביחידה אחת גדול מזה של הנקודה הנמצאת על הישר ℓ_1 . מכאן אם $0^\circ < \alpha_1 < \alpha_2 < 90^\circ$, אז $m_1 < m_2$. אם $90^\circ < \alpha_1 < \alpha_2 < 180^\circ$, אז מספר היחידות שבהן קטן שיעור ה- y של הנקודה הנמצאת על ישר ℓ_2 כאשר שיעור ה- x שלה גדל ביחידה אחת, קטן מזה של הנקודה הנמצאת על הישר ℓ_1 . לכן במקרה הזה מתקיים $|m_1| > |m_2|$. מאי-השוויון האחרון ומאי-השוויונים $m_1 < 0$ ו- $m_2 < 0$ נובע כי $-m_1 > -m_2$. מכאן נובע כי $m_1 < m_2$.



נסמן ב- α_1 את הזווית שבין הישר AB לכיוון החיובי של ציר ה- x , ב- α_2 את הזווית בין הישר BC לכיוון החיובי של ציר ה- x , ונסמן ב- α_3 את הזווית שבין הישר CD לכיוון החיובי של ציר ה- x .

מה אפשר לומר על זוויות אלה?
לפי הציור, מתקיים:

$$90^\circ > \alpha_3 > \alpha_1 > \alpha_2 > 0^\circ$$

מכאן

$$m_{CD} > m_{AB} > m_{BC} \quad (10)$$

(ראו טענה (9)).

מהטענות (7), (8) ו-(10) נובע כי

$$m_{CD} = 3, \quad m_{AB} = \frac{8}{3}, \quad m_{BC} = \frac{4}{3}$$

מכאן ומטענות (5) ו-(6) נובע כי

משוואה (2) מייצגת את הישר CD ,

משוואה (1) מייצגת את הישר AB ,

משוואה (4) מייצגת את הישר BC .

קיבלנו כי

$$, \ell_{CD} : y = 3x - 8 \quad (11)$$

$$, \ell_{AB} : y = \frac{8}{3}x + \frac{8}{3} \quad (12)$$

$$\ell_{BC} : y = \frac{4}{3}x + \frac{16}{3} \quad (13)$$

יכולנו להגיע אל שלוש הטענות האחרונות בדרך אחרת: יכולנו להתמקד באיברים החופשיים במשוואות (1), (2) ו-(4) ובנקודות החיתוך של הישרים AB , BC ו- CD עם ציר ה- y . הרי בפרק הקודם אמרנו כי האיבר החופשי במשוואה מפורשת שווה לשיעור ה- y של נקודת החיתוך של הישר המיוצג על ידי המשוואה עם ציר ה- y .

האיברים החופשיים במשוואות (1), (2) ו-(4) שווים בהתאמה ל- $\frac{8}{3}$, ל-8 ול- $\frac{16}{3}$. עבור שלושת המספרים האחרונים מתקיים:

$$-\frac{16}{3} > \frac{8}{3} > -8$$

מכאן

(14) הישר (4) חותך את ציר ה- y בנקודה גבוהה יותר מאשר ישר (1), וישר (1) חותך את ציר ה- y בנקודה גבוהה יותר מאשר ישר (2).

לפי הציור האחרון אפשר להסיק כי

(15) הישר BC חותך את ציר ה- y בנקודה גבוהה יותר מאשר הישר AB והישר AB חותך את ציר ה- y בנקודה גבוהה יותר מאשר ישר CD .

מטענות (5), (14) ו-(15) נובע כי

משוואה (2) מייצגת את הישר CD ,

משוואה (1) מייצגת את הישר AB ,

משוואה (4) מייצגת את הישר BC .

הגענו אל הטענות (11), (12) ו-(13) בשתי דרכים שונות. עכשיו נוכל למצוא את השיעורים של הנקודות B ו- C . זוג השיעורים של הנקודה B הוא פתרון של מערכת המשוואות

$$\begin{cases} y = \frac{8}{3}x + \frac{8}{3} \\ y = \frac{4}{3}x + \frac{16}{3} \end{cases}$$

המורכבת מהמשוואות של הישרים AB ו- BC .

פתרנו את מערכת המשוואות הזו בפרק הקודם. קיבלנו כי פתרונה הוא זוג המספרים הסדור $(2, 8)$. מכאן $B(2, 8)$.

זוג השיעורים של נקודה C הוא פתרון של מערכת המשוואות

$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}x + \frac{16}{3} \\ y = 3x - 8 \end{cases}$$

המורכבת מהמשוואות של הישרים BC ו- CD .

פתרון של מערכת המשוואות האחרונה הוא זוג המספרים הסדור $(8, 16)$. מכאן $C(8, 16)$.

מתברר שהשיעורים של נקודות B ו- C בבעיה הנוכחית זהים לאלו שבבעיה אשר פתרנו בפרק הקודם. לכן גם השיעורים של אמצע הקטע BC בבעיה הנוכחית יהיו זהים לאלו אשר קיבלנו בפרק הקודם, כלומר $E(5, 12)$.

4. באמצע הדרך

לב חכם שומע חכמה ישבחנה, ועוד יוסיף.
ולב נבוב שומע חכמה ישליכנה, ולא יוסיף.

(בן סירא, פרק יג)

בעיה. ישר ℓ עובר דרך נקודה $P(1, 2)$; הוא חותך את ציר ה- x בנקודה A , את ציר ה- y בנקודה B ואת הישר $y = -2x + 10$ בנקודה C . גם נתון כי נקודה P היא אמצע הקטע BC . מצאו את שיעורי נקודה A .

דרך החשיבה ופתרון.

מה צריך למצוא?

צריך למצוא את השיעורים של נקודה A .

מה אפשר לומר על נקודה זו?

על פי הנתון בבעיה, הנקודה היא נקודת החיתוך של הישר ℓ עם ציר ה- x . המשוואה של

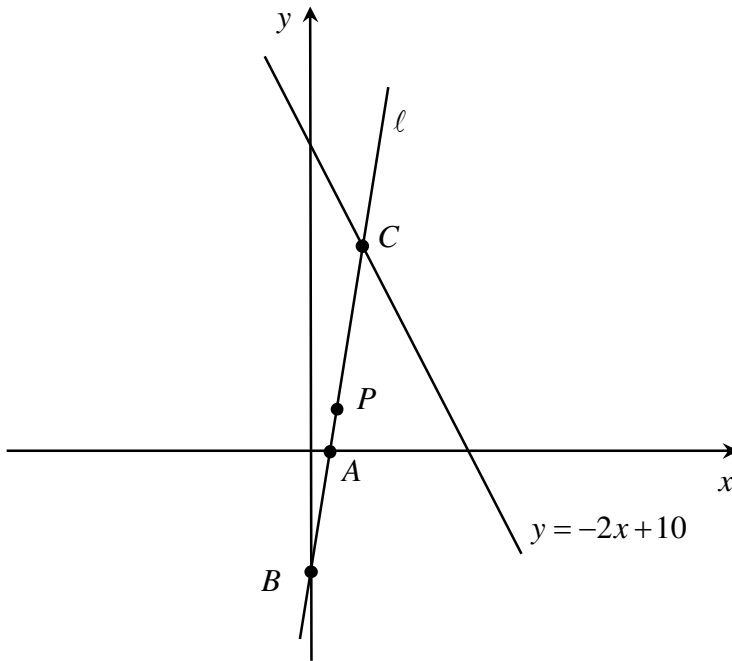
ציר ה- x היא $y = 0$.

ומה אפשר לומר על הישר ℓ ?

על פי הנתון בבעיה, הישר עובר דרך נקודה $P(1, 2)$, וכמו כן נתון כי נקודה P היא

אמצע הקטע BC , שאחד מקצותיו, נקודה B , הוא נקודת החיתוך של הישר ℓ עם ציר ה- y , ואילו הקצה השני של הקטע, נקודה C , הוא נקודת החיתוך של הישר ℓ עם הישר $y = -2x + 10$.

אם נצליח למצוא את משוואת הישר ℓ , נוכל למצוא את שיעורי נקודה A . הרי הנקודה נמצאת על ציר ה- x וגם כן על הישר ℓ , ולכן שיעוריה מקיימים גם את המשוואה $y = 0$ וגם את המשוואה של הישר ℓ . מכאן הזוג הסדור של שיעורי הנקודה A הוא פתרון של מערכת המשוואות המורכבת מהמשוואה $y = 0$ ומהמשוואה של הישר ℓ .



וכיצד נמצא את המשוואה של הישר ℓ ?

כדי לענות על שאלה זו נשאל את עצמנו את השאלה הבאה: כיצד בכלל מוצאים

משוואות של ישרים?

אם הישר שאת משוואתו צריך למצוא אינו מאונך לציר ה- x , לעתים קרובות מוצאים את משוואתו כך: מוצאים את השיעורים x_1 ו- y_1 של אחת מהנקודות הנמצאות על הישר, מוצאים את השיפוע m של הישר ולאחר מכן נעזרים בנוסחה הבאה:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad (1)$$

האם הישר ℓ מאונך לציר ה- x ?

ודאי שלא. הרי על פי הנתון הוא חותך את ציר ה- y בנקודה B ועובר דרך הנקודה

$P(1, 2)$, שאינה נמצאת עליו.

למזלנו, שיעורי אחת מהנקודות הנמצאות על הישר ℓ , שיעורי נקודה P , ידועים לנו לפי הנתון בבעיה. השיעורים הם:

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 2 \quad (2)$$

כדי למצוא את משוואת הישר ℓ נשאר רק למצוא את השיפוע של הישר ולאחר מכן להיעזר בנוסחה (1).

קעת עלינו לשאול את עצמנו: כיצד מוצאים שיפוע של ישר מסוים?

בעיות מסוג זה פותרים בדרכים הבאות:

(א) מוכיחים (או נעזרים בכך שזה נתון בבעיה) שהישר $y = m_1x + n_1$: ℓ_1 , ששיפועו

m_1 , צריך להימצא מקביל לישר $y = m_2x + n_2$: ℓ_2 , ששיפועו ידוע, ונעזרים

בשוויון $m_1 = m_2$.

(ב) מוצאים את הזווית α בין הישר $y = mx + n$, שאת שיפועו צריך למצוא, לבין

הכיוון החיובי של ציר ה- x , ונעזרים בשוויון $m = \tan \alpha$.

(ג) אם ידועות שתי נקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) כלשהן המונחות על הישר, מחשבים

את השיפוע m של הישר $y = mx + n$ באמצעות הנוסחה הבאה:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (3)$$

(ד) אם הישרים $y = m_1x + n_1$: ℓ_1 ו- $y = m_2x + n_2$: ℓ_2 מאונכים זה לזה והשיפוע

m_1 של הישר ℓ_1 ידוע, מחשבים את השיפוע m_2 בעזרת הנוסחה: $m_2 = -\frac{1}{m_1}$.

(ה) נעזרים בנוסחאות:

$$\tan \alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} , \quad \tan \varphi = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|$$

כאן α היא אחת מהזוויות הצמודות בין הישרים $y = m_1x + n_1$ ו- $y = m_2x + n_2$

φ היא הזווית החדה בין ישרים אלו.¹

¹ הנוסחאות האחרונות יוסברו בפרק 10

(ו) לפעמים מצליחים למצוא את השיפוע של הישר בעזרת הנוסחה לחישוב מרחק בין נקודה לישר.

ננסה למצוא את השיפוע m של הישר ℓ הנ"ל בעזרת נוסחה (3).
למה דווקא בעזרת נוסחה זו ולא באחת הדרכים האחרות הנ"ל?
ראשית, מפני ששיעורי אחת הנקודות הנמצאות על הישר ידועות לנו, ונוסף על כך – ברשותנו מצוי מידע מסוים על שתי נקודות נוספות הנמצאות על הישר: הנקודות B ו- C .
אולי נוכל לחשב את השיעורים של לפחות אחת מהנקודות B ו- C .
נוסף על כך נבחר בדרך זו מפני שאף אחת מהדרכים האחרות לא נראית רלוונטית לפתרון הבעיה הנוכחית.

ובכן, ננסה למצוא את השיעורים של לפחות אחת מהנקודות B ו- C .
שוב נשאל את עצמנו: מה נתון?
על פי הנתון נקודה $P(1,2)$ היא אמצע הקטע BC . ידוע שאם נקודה (x_M, y_M) היא

אמצע הקטע המחבר את נקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) כלשהן, אז $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ו-

$$y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} \text{ לכן}$$

$$\frac{x_B + x_C}{2} = 1 \quad (4)$$

$$\frac{y_B + y_C}{2} = 2 \quad (5)$$

כאן x_B הוא השיעור הראשון של הנקודה B , x_C הוא השיעור הראשון של הנקודה C ,
 y_B הוא השיעור השני של הנקודה B ו- y_C הוא השיעור השני של הנקודה C .

נוכל להתייחס לזוג השוויונים האחרונים כאל שתי משוואות עם ארבעת הנעלמים
הבאים: x_B, x_C, y_B, y_C . אם נצליח להרכיב עוד שתי משוואות עם נעלמים אלו ולפתור
את המערכת של ארבע המשוואות עם ארבעת הנעלמים שתתקבל, נוכל למצוא את שיעורי
נקודה B וגם את שיעורי נקודה C .

כעת עלינו לשאול את עצמנו: מה נאמר בבעיה על נקודה B ?

הנקודה היא נקודת החיתוך של הישר ℓ עם ציר ה- y . מכאן הנקודה נמצאת על ציר ה- y ומכאן

$$x_B = 0 \quad (6)$$

ומה נאמר בבעיה על נקודה C ?

הנקודה C היא נקודת החיתוך של הישר ℓ עם הישר $y = -2x + 10$. מכאן הנקודה נמצאת על הישר $y = -2x + 10$ ומכאן

$$y_C = -2x_C + 10 \quad (7)$$

(נקודה מסוימת נמצאת על ישר מסוים אך ורק אם שיעורי הנקודה מקיימים את משוואת הישר).

כעת יש לנו ארבע משוואות עם ארבעת הנעלמים הנ"ל. נפתור את מערכת המשוואות

$$\begin{cases} \frac{x_B + x_C}{2} = 1 \\ \frac{y_B + y_C}{2} = 2 \\ x_B = 0 \\ y_C = -2x_C + 10 \end{cases} \quad (8)$$

המורכבת מהמשוואות (4), (5), (6) ו-(7).

לאחר שנציב במשוואה הראשונה של מערכת המשוואות זו על פי משוואה שלישית ונכפיל ב-2 את משוואה אשר תתקבל וגם את המשוואה השנייה של מערכת המשוואות נקבל:

$$\begin{cases} x_C = 2 \\ y_B + y_C = 4 \\ x_B = 0 \\ y_C = -2x_C + 10 \end{cases} \quad (9)$$

כאשר נציב במשוואה הרביעית של מערכת המשוואות האחרונה על פי המשוואה הראשונה שלה נקבל:

$$y_C = -2 \cdot 2 + 10$$

מכאן

$$y_C = 6 \quad (10)$$

ידועים לנו כבר שני השיעורים של נקודה C , הנמצאת על ℓ . זה יספיק כדי למצוא את השיפוע של הישר. הרי גם ידוע לנו מה הם השיעורים של נקודה P , שנמצאת גם היא על ישר זה. בכל זאת, נוסף על שיעורה הראשון של נקודה B , נמצא גם את שיעורה השני. הרי זו לא טרחה גדולה.

כאשר נציב במשוואה השנייה של מערכת המשוואות (9) על פי השורה (10) נקבל

$$y_B + 6 = 4$$

מכאן

$$y_B = -2$$

כעת ברשותנו השיעורים של שלוש נקודות הנמצאות על הישר ℓ . כאשר ניעזר בנוסחה (3) ונציב בה את השיעורים של זוג כלשהו משלוש הנקודות, נקבל את השיפוע m של הישר ℓ . נציב בנוסחה (3) את השיעורים של הנקודות B ו- P , ונקבל:

$$m = \frac{y_P - y_B}{x_P - x_B} = \frac{2 - (-2)}{1 - 0} = 4 \quad (11)$$

כעת נציב במשוואה (1) על פי שורות (2) ו-(11), ונקבל כי משוואת הישר ℓ היא:

$$y - 2 = 4(x - 1)$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה הבאה:

$$y = 4x - 2$$

כדי למצוא את השיעורים של נקודה A נשאר רק לפתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 4x - 2 \end{cases}$$

פתרון מערכת המשוואות הוא זוג המספרים הסדור $(0.5, 0)$.

לכן $A(0.5, 0)$. מש"ל.

5. אחת הדרכים להרכבת משוואות

מה יקרה אם מישוהו שמאכיל תינוק בחלב מבקבוק יוריד את הפטמה מהבקבוק ויטה אותו כך שהחלב יזרום במהירות? במקרה טוב, אם התינוק ישכב בפה סגור, כל החלב יישפך על פניו, אך קרוב לוודאי שהתינוק ייחנק.

אף על פי שהם רחוקים מגיל ינקות, דבר דומה קורה לתלמידים כאשר מורה מנסה להעביר חומר לימוד רב במהירות ובזמן קצר. הבעיה היא שלעתים קרובות לא עומד לרשות המורה די זמן כדי להסביר באריכות את כל מה שעליו ללמד לטובת אלה שמתקשים "לשתות" ידע רב במהירות בכל "האכלה". את פרק זה ואת שאר הפרקים בספר אפשר לקרוא בקצב המתאים לכם, ואף לחזור על כך כמה פעמים לפי הצורך. עדיף לקרוא את כל הכתוב בלי למהר, אפילו אם יש ביכולתכם לקלוט מהר יותר מרוב האנשים. "*Festina lente*" (הזדרז לאט – לטינית), נהג לומר אוגוסטוס קיסר.

בעיה. שניים מהתיכונים של משולש נמצאים על הישרים $y = 2x$ ו- $5y - x = 15$. אחד מקודקודי המשולש נמצא בנקודה $(1, 8)$. מצאו את שני הקודקודים האחרים של המשולש.

דרך החשיבה ופתרון.

מה נתון?

נתון כי שניים מהתיכונים של משולש מסוים מונחים על הישרים $y = 2x$ ו- $5y - x = 15$, וש אחד מקודקודי המשולש נמצא בנקודה $(1, 8)$. כלומר, ידועים לנו המשוואות של שני תיכונים ושיעורי אחד הקודקודים של המשולש.

מה צריך למצוא בבעיה זו?

צריך למצוא את השיעורים של שני הקודקודים האחרים של המשולש. נסמן את הנקודה $(1, 8)$ ב- A . בינתיים לא ידוע לנו אם אחד התיכונים הנ"ל יוצא מנקודה A או שמנקודה זו יוצא התיכון השלישי.

התיכון המונח על הישר $y = 2x$ יוצא מקודקוד A של המשולש הנתון אך ורק אם נקודה זו נמצאת על הישר המדובר. כדי לבדוק אם נקודה A נמצאת על הישר $y = 2x$ נציב את שיעורי נקודה זו (כלומר נציב את $x = 1$ ואת $y = 8$) במשוואת הישר ונקבל:

$$8 = 2$$

השוויון האחרון הוא פסוק שקר. לכן הנקודה $A(1, 8)$ לא נמצאת על הישר $y = 2x$. מכאן תיכון המשולש המונח על הישר $y = 2x$ יוצא מהקודקוד השונה מנקודה A . כעת נציב את שיעורי נקודה A במשוואה $5y - x = 15$ ונקבל:

$$5 \cdot 8 - 1 = 15$$

התקיימות של השוויון האחרון שקולה להתקיימות השוויון הבא:

$$39 = 15$$

השוויון האחרון הוא פסוק שקר, ולכן הנקודה A לא נמצאת גם על הישר $5y - x = 15$. מכאן תיכון המשולש הנמצא על הישר $5y - x = 15$ יוצא מהקודקוד השונה מנקודה A . נסמן ב- B את קודקוד המשולש הנתון הנמצא על הישר $y = 2x$, וב- C את הקודקוד הנמצא על הישר $5y - x = 15$. אנו מתבקשים למצוא את השיעורים של שתי נקודות אלו. ננסה להרכיב מערכת של ארבע משוואות שבה השיעורים של הנקודות B ו- C ישמשו נעלמים.

קודם כל ניעזר בכך ש-

$$(1) \quad \text{הנקודה } B(x_B, y_B) \text{ נמצאת על הישר } y = 2x.$$

טענה (1) מתקיימת אך ורק אם מתקיים:

$$(2) \quad y_B = 2x_B$$

קיבלנו את המשוואה הראשונה ממערכת המשוואות אשר אנו מנסים להרכיב. כעת ניעזר בכך ש-

$$(3) \quad \text{הנקודה } C(x_C, y_C) \text{ נמצאת על הישר } 5y - x = 15.$$

טענה (3) מתקיימת אך ורק אם מתקיים:

$$5y_C - x_C = 15 \quad (4)$$

יש לנו כבר שתי משוואות עם הנעלמים x_C, y_B, y_C : המשוואות (2) ו-(4). נותר רק להרכיב עוד שתי משוואות עם הנעלמים הנ"ל ולפתור את מערכת המשוואות אשר תתקבל.

כיצד נרכיב את שתי המשוואות הנוספות?

כדי לענות על שאלה זו נשאל את עצמנו : כיצד מרכיבים משוואות בגיאומטריה

אנליטית?

אחת הדרכים להרכבת משוואות עם כמה נעלמים בגיאומטריה אנליטית היא להביע באמצעות הנעלמים את השיעורים של נקודה כלשהי הנמצאת על קו שמשוואתו ידועה, ולאחר מכן להציב את הביטויים אשר התקבלו עבור שיעורי הנקודה במשוואת הקו שעליו הנקודה נמצאת.

ברשותנו משוואות של שני תיכונים של המשולש ABC . המשוואה של אחד התיכונים היא $y = 2x$, והמשוואה של התיכון הנוסף היא $5y - x = 15$. ננסה להביע באמצעות שיעורי הנקודות B ו- C את השיעורים של נקודה כלשהי על ישר $y = 2x$, וכמו כן את השיעורים של נקודה כלשהי על ישר $5y - x = 15$.

נשאל את עצמנו את שתי השאלות הבאות : מה אפשר לומר על הישר $y = 2x$? את השיעורים של איזו נקודה (שאינה מתלכדת עם נקודה B) על ישר זה אפשר להביע באמצעות שיעורי הנקודות B ו- C ובאמצעות השיעורים הידועים לנו של נקודה A ? **הישר $y = 2x$ עובר דרך נקודה B וחותה את הקטע AC . מכאן**

$$\text{אמצע הקטע } AC \text{ נמצא על הישר } y = 2x. \quad (5)$$

נסמן את אמצע הקטע AC ב- M . לפי הנוסחאות לשיעורי אמצע הקטע, מתקיים :

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} \quad (6)$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} \quad (7)$$

שיעורי נקודה A ידועים לנו :

$$x_A = 1, \quad y_A = 8 \quad (8)$$

נציב בשוויונים (6) ו-(7) על פי שורה (8), ונקבל :

$$x_M = \frac{1 + x_C}{2} \quad (9)$$

$$y_M = \frac{8 + y_C}{2} \quad (10)$$

על סמך טענה (5) נקבל :

$$y_M = 2x_M \quad (11)$$

נציב בשוויון (11) על פי השוויונים (9) ו-(10), ונקבל את המשוואה הבאה עם הנעלמים

$$x_C \text{ ו- } y_C :$$

$$\frac{8 + y_C}{2} = 2 \cdot \frac{1 + x_C}{2} \quad (12)$$

נסמן ב- N את אמצע הקטע AB . עבור שיעורי נקודה זו מתקיימים השוויונים הבאים :

$$x_N = \frac{1 + x_B}{2} \quad (13)$$

$$y_N = \frac{8 + y_B}{2} \quad (14)$$

$$5y_N - x_N = 15 \quad (15)$$

נציב בשוויון (15) על פי שוויונים (13) ו-(14), ונקבל את המשוואה הבאה עם הנעלמים x_B

$$y_B \text{ ו- } :$$

$$5 \cdot \frac{8 + y_B}{2} - \frac{1 + x_B}{2} = 15 \quad (16)$$

כעת ברשותנו ארבע משוואות עם ארבעת הנעלמים הנ"ל: משוואות (2), (4), (12) ו-(16). בשתיים מארבע המשוואות מופיעים רק הנעלמים x_B ו- y_B , ואילו בשתי המשוואות האחרות מופיעים רק הנעלמים x_C ו- y_C . לכן במקום לרשום את המערכת של ארבע משוואות עם ארבעה הנעלמים, אנו יכולים להרשות לעצמנו לרשום ולפתור שתי מערכות קטנות יותר: מערכת של שתי משוואות עם הנעלמים x_B ו- y_B , ומערכת של שתי משוואות עם הנעלמים x_C ו- y_C . נעשה זאת, אך לפני כן את נקבל המשוואות השקולות למשוואות (12) ו-(16) אשר יהיו פשוטות יותר.

משוואה (12) שקולה למשוואה הבאה:

$$8 + y_C = 2(1 + x_C)$$

משוואה זו שקולה למשוואה הבאה:

$$y_C = 2x_C - 6 \quad (17)$$

המשוואות הבאות שקולות אחת לשנייה ולמשוואה (16):

$$5(8 + y_B) - (1 + x_B) = 30$$

$$40 + 5y_B - 1 - x_B = 30$$

$$x_B = 5y_B + 9 \quad (18)$$

נפתור את המערכת

$$\begin{cases} y_B = 2x_B \\ x_B = 5y_B + 9 \end{cases} \quad (19)$$

המורכבת מהמשוואות (2) ו-(18). נציב במשוואה השנייה של מערכת משוואות זו על פי המשוואה הראשונה שלה, ונקבל:

$$x_B = 5(2x_B) + 9$$

נפתור את המשוואה האחרונה:

$$x_B = 5(2x_B) + 9 \Leftrightarrow x_B = 10x_B + 9 \Leftrightarrow -9x_B = 9 \Leftrightarrow x_B = -1 \quad (20)$$

נציב במשוואה הראשונה של מערכת המשוואות (19) על פי התוצאה אשר קיבלנו בשורה (20), ונקבל:

$$y_B = -2$$

קיבלנו כי הקודקוד B של המשולש המדובר נמצא בנקודה $(-1, -2)$.
לאחר שפותרים את מערכת

$$\begin{cases} 5y_C - x_C = 15 \\ y_C = 2x_C - 6 \end{cases} \quad (21)$$

המורכבת ממשוואות (4) ו-(17), מקבלים כי קודקוד C של המשולש נמצא בנקודה $(5, 4)$.
תשובה: הקודקודים הם הנקודות $(-1, -2)$ ו- $(5, 4)$.

הערה. אם נבחן את העניין לעומקו, יתגלה כי קיבלנו ארבע משוואות עם הנעלמים x_B , x_C , y_B ו- y_C ממערכת של שמונה משוואות עם שמונת הנעלמים הבאים: x_B , y_B , x_C , y_C , x_M , y_M , x_N ו- y_N . מערכת זו כללה את שמונה המשוואות הבאות: המשוואות (2), (4), (9), (10), (11), (13), (14) ו-(15). מערכת המשוואות האחרונה משקפת את כל מה שהיה נתון בבעיה. היא שקולה למערכת המשוואות המקיימת את התנאים הבאים: (א) שתי המשוואות הראשונות שלה הן המשוואות הרשומות במערכת (19), (ב) שתי המשוואות הבאות במערכת זו הן המשוואות הרשומות במערכת (21), (ג) ארבע המשוואות האחרונות של המערכת הן משוואות (9), (10), (13), (14).

6. שבע מנות.

... הסמל הפטפטן עוד היה ממשיך לנאום זמן רב, אך הנה נדחקו דרך ההמון והתקרבו אליו שני קוזקים. השניים ניגשו אליו ואמרו לו בתוכחה: "סמיון נקיטוביץ", אל תגיד את כל השטויות בבת אחת, תשמור משהו למחר", ואז אספו אותו בידיהם והוליכו אותו אל רכבת תובלה.
(ארטיום וסילי)

לא כל אחד מסוגל לאכול ברווז שלם בבת אחת. רוב בני האדם אפילו לא ינסו, ואלה שינסו ודאי יחושו ברע לאחר הארוחה. לעומת זאת, אדם אחד מסוגל לאכול לווייתן שלם אם יאכל אותו במנות לא גדולות במשך חודשים רבים.

6.0 ברווז שלם

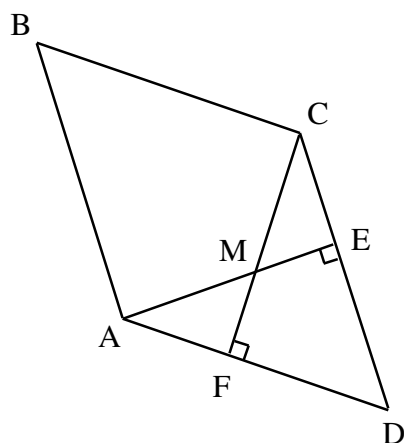
בעיה. נתונה מקבילית $ABCD$ ששניים

מקודקודיה הם $C(6,15)$ ו- $D(12,-3)$. קטע

AE הוא גובה לצלע CD , וקטע CF הוא גובה

לצלע AD . הגבהים CF ו- BD נפגשים בנקודה

$M(3,6)$ (ראו ציור משמאל).



א. מצאו את משוואת הישר CF

ב. מצאו את משוואת הישר AE

ג. מצאו את השיעורים של נקודה A

ד. מצאו את משוואת הצלע AB

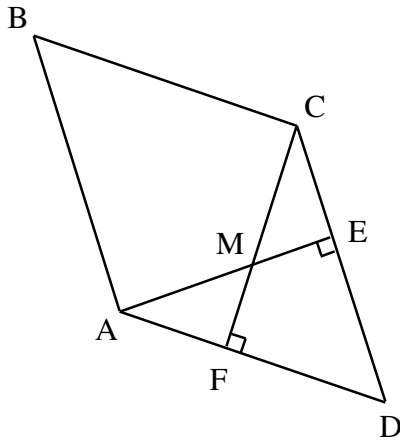
ה. מצאו את השיעורים של נקודה B

ו. ענו על השאלה הבאה: האם המקבילית $ABCD$ היא מעוי? נמקו את תשובתכם.

ז. מצאו את היקף המקבילית $ABCD$ ואת שטחה.

הפתרון וההסברים הנלווים משתרעים על פני מספר רב של עמודים, ולכן כדי להקל את תהליך "עיכול" פתרון הבעיה נחלק אותה לשבע מנות.

6.1 מנה ראשונה



בעיה: נתונה מקבילית $ABCD$ ששניים

מקודקודיה הם $C(6,15)$ ו- $D(12,-3)$. קטע

AE הוא גובה לצלע CD , וקטע CF הוא גובה

לצלע AD . הגבהים CF ו- BD נפגשים בנקודה

$M(3,6)$ (ראו ציור משמאל). מצאו את משוואת

הישר CF .

בדומה לרוב הבעיות שעמן יש להתמודד בחיי היומיום, בבעיה הנ"ל ישנם נתונים מיותרים. הפותר בעיה מסוג זה חייב להבדיל בין נתונים מיותרים לבין נתונים הכרחיים, שבלעדיהם אי אפשר לפתור אותה. זה מכשול משמעותי, נכון?

דרך החשיבה ופתרון א'.

מה צריך למצוא בבעיה זו?

צריך למצוא את משוואת הישר CF . כפי שהסכמנו בפרק 2, נסמן את הישר גם ב- ℓ_{CF} .

מה נתון? למה מהנתון בבעיה יש קשר כלשהו לישר CF ?

נרשום כעת רק את הנתונים שיש להם קשר כלשהו לישר CF .

ובכן, על פי הנתון

$$(1.1) \quad \text{הקטע } CF \text{ הוא גובה לצלע } AD \text{ במקבילית } ABCD$$

כמו כן נתונים שיעורי הנקודות C ו- M הנמצאות על ישר זה:

$$(1.2) \quad C(6,15)$$

$$(1.3) \quad M(3,6)$$

(לפי הנתון הנקודה M היא נקודת המפגש של הקטעים CF ו- BD , כלומר היא נמצאת

על כל אחד מקטעים אלה).

בבעיה שעלינו לפתור כעת טענה (1.1) היא נתון מיותר. טענות (1.2) ו-(1.3) הן נתונים הכרחיים. מי שישאל את עצמו כיצד מוצאים את המשוואה של ישר מסוים, ואז ייזכר לפחות באחת הנוסחאות למשוואת ישר העובר דרך שתי נקודות, יוכל להבחין בקלות בהבדלים אלה בין הנתונים. נעסוק בנוסחאות אלו, ובשלב מאוחר יותר בסעיף זה ניעזר באחת מהן לפתרון הבעיה הנוכחית. ראשית נמצא את משוואת הישר CF בלי להיעזר באף נוסחה למשוואת ישר העובר דרך שתי נקודות.

ניעזר בתשובה אחרת לשאלה "כיצד מוצאים את המשוואה של ישר מסוים?". ניזכר שלעתים קרובות מוצאים את משוואתו של ישר בדרך הבאה:

מוצאים את השיפוע m של הישר ואת השיעורים x_1 ו- y_1 של אחת הנקודות הנמצאות עליו. לאחר מכן מציבים את המספרים שנמצאו בנוסחה למשוואה של ישר ששיפועו m ואשר עובר דרך נקודה (x_1, y_1) . הנוסחה להלן:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad (1.4)$$

לעתים קרובות, לפני שמנסים למצוא בדרך זו את המשוואה של ישר בודקים אם השיפוע של הישר מוגדר. אם שיפועו לא מוגדר, כלומר הישר מאונך לציר ה- x (במילים אחרות, הישר מקביל לציר ה- y או מתלכד עמו), אז כדי למצוא את משוואתו די למצוא את השיעור הראשון x_1 של אחת הנקודות הנמצאות עליו. לאחר מכן אפשר לרשום את משוואת הישר: $x = x_1$ ¹.

שיעורי ה- x של הנקודות C ו- M שונים זה מזה (ראו את שורות (1.2) ו-(1.3)). לכן הישר CF לא מאונך לציר ה- x ושיפועו מוגדר.

כעת נשאל את עצמנו: כיצד מוצאים את השיפוע של ישר? במקרה כאשר ידועים השיעורים של שתי נקודות כלשהן המונחות על ישר ניתן לחשב את שיפועו m לפי הנוסחה

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (1.5)$$

¹ באופן דומה, אם הישר מאונך לציר ה- y , כדי למצוא את משוואתו די למצוא את שיעור y_1 של אחת הנקודות הנמצאות עליו. לאחר מכן אפשר לרשום את משוואת הישר: $y = y_1$.

באגף הימני של הנוסחה האחרונה רשומים השיעורים של שתי נקודות, הנקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) , הנמצאות על הישר.

ברשותנו שיעורים של שתי נקודות הנמצאות על הישר CF , השיעורים של נקודות C ו-

M :

$$(1.6) \quad x_C = 6, \quad y_C = 15 \quad (\text{השיעורים של נקודה } C \text{ (ראו את השורה (1.2))})$$

ו-

$$(1.7) \quad x_M = 3, \quad y_M = 6 \quad (\text{השיעורים של נקודה } M \text{ (ראו את השורה (1.3))})$$

כאשר נציב בנוסחה (1.5) לפי השוויונים

$$(1.8) \quad x_1 = x_M, \quad y_1 = y_M$$

ו-

$$x_2 = x_C, \quad y_2 = y_C$$

נקבל את השוויון הבא עבור השיפוע m_{CF} של הישר CF :

$$m_{CF} = \frac{y_C - y_M}{x_C - x_M}$$

עכשיו נציב בשוויון האחרון על פי שורות (1.6) ו-(1.7) ונקבל:

$$(1.9) \quad m_{CF} = \frac{15 - 6}{6 - 3} = \frac{9}{3} = 3$$

כדי לקבל את משוואת הישר CF נציב בנוסחה (1.4) לפי השוויון $m = m_{CF}$ ולפי שורה

(1.8), ונקבל:

$$(1.10) \quad \ell_{CF}: y - y_M = m_{CF}(x - x_M)$$

או במקום להציב במשוואה (1.4) לפי שורה (1.8) נציב בה לפי השוויונים $x_1 = x_C$ ו-

$y_1 = y_C$, ונקבל:

$$\ell_{CF}: y - y_C = m_{CF}(x - x_C) \quad (1.11)$$

לאחר מכן נציב בנוסחה (1.10) לפי שורות (1.7) ו-(1.9), ונקבל את המשוואה הבאה של ישר CF :

$$y - 6 = 3(x - 3)$$

או נציב במשוואה (1.11) לפי שורות (1.6) ו-(1.9), ונקבל את המשוואה הבאה של ישר זה:

$$y - 15 = 3(x - 6)$$

שתי המשוואות האחרונות שקולות זו לזו ולמשוואה הבאה:

$$y = 3x - 3 \quad (1.12)$$

זאת משוואה מפורשת של הישר CF .

דרך החשיבה ופתרון ב'.

אם נציב במשוואה (1.4) לפי שוויון (1.5) נקבל את הנוסחה הבאה למשוואת הישר העובר דרך שתי נקודות:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad (1.13)$$

אם נוסף על תנאי $x_1 \neq x_2$ מתקיים גם התנאי $y_1 \neq y_2$, אז משוואה (1.13) שקולה למשוואה הבאה:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (1.14)$$

ולמשוואה הבאה

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (1.15)$$

קל יותר לזכור את נוסחאות (1.14) ו-(1.15) מאשר את נוסחה (1.13). לנוסחה (1.15) יש יתרון נוסף על פני נוסחה (1.13): היא נובעת מכך שהנקודה (x, y) נמצאת על הישר העובר דרך הנקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) אם, ורק אם, הווקטור $(x - x_1, y - y_1)$ תלוי בווקטור

$$(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

נפתור את הבעיה האחרונה בעזרת נוסחה (1.15). נציב בה לפי השוויונים:

$$x_1 = 3, \quad y_1 = 6, \quad x_2 = 6, \quad y_2 = 15$$

(ראו שורות (1.6) ו-(1.7)). נקבל את המשוואה של הישר CF :

$$\frac{x-3}{6-3} = \frac{y-6}{15-6}$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה (1.12).

תשובה: $y = 3x - 3$.

הערה 1. התחלנו לפתור את הבעיה בשאלה כיצד מוצאים את המשוואה של ישר מסוים.

לאחר מכן אמרנו כי אחת הדרכים למציאת משוואת ישר היא למצוא את השיעורים של

אחת הנקודות הנמצאות על ישר ושל שיפוע הישר; לאחר מכן אפשר להיעזר בנוסחה (1.4).

נציין שאם שיפוע הישר ושיעורי אחת הנקודות הנמצאות עליו ידועים, אז כדי למצוא את

הגודל של האיבר החופשי n במשוואה המפורשת $y = mx + n$ של הישר אפשר פשוט

להציב במשוואה זאת את ערך השיפוע ואת השיעורים הידועים של הנקודה הנמצאת על הישר.

לאחר שמצאנו את משוואת הישר בדרך אחת הצגנו דרך נוספת למציאתה. קיבלנו שלוש

נוסחאות למשוואת הישר העובר דרך שתי נקודות, ונעזרנו באחת מהן כדי למציאת

משוואת הישר הנדרשת.

אילו דרכים נוספות קיימות למציאת משוואת הישר?

ישנה גם דרך זו: מוצאים את השיעורים של נקודה כלשהי הנמצאת על הישר ואת וקטור

הכיוון $\underline{u} = (u_1, u_2)$ של הישר (הווקטור $\underline{u}$ השונה מ- $\underline{0} = (0, 0)$ נקרא וקטור הכיוון של

הישר, אם הוא נמצא על הישר או מקביל לו); לאחר מכן, אם יתברר כי הישר לא מאונך

לאף אחד מהצירים, אפשר להיעזר בנוסחה הבאה למציאת משוואת הישר:

$$\frac{x - x_1}{u_1} = \frac{y - y_1}{u_2} \quad (1.16)$$

(כאן (x_1, y_1) – נקודה כלשהי הנמצאת על הישר).

המשוואה האחרונה נקראת **משוואה קנונית** של הישר. מקבלים אותה בהסתמך על כך שנקודה (x, y) נמצאת על הישר אך ורק אם הווקטור $(x - x_1, y - y_1)$ תלוי ליניארית בווקטור הכיוון $\underline{u} = (u_1, u_2)$ של הישר.

בבעיה שפתרנו הווקטור הבא הוא וקטור הכיוון של הישר CF :

$$\underline{u} = \overrightarrow{MC} = (6 - 3, 15 - 6) = (3, 9) \quad (1.17)$$

כאשר נציב בנוסחה (1.16) את השיעורים של נקודה M (במקום x_1 ו- y_1) ואת השיעורים של וקטור הכיוון של הישר CF הרשומים בשורה (1.17), נקבל את המשוואה

$$\frac{x - 3}{3} = \frac{y - 6}{9}$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה (1.12).

שימו לב שנוסחה (1.15) נובעת מנוסחה (1.16).

דרך נוספת למציאת משוואת: מוצאים את שיעוריהן של אחת הנקודות הנמצאות על הישר ואת הווקטור $\underline{n} = (a, b)$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$ הניצב לישר; לאחר מכן אפשר להיעזר בנוסחה הבאה למציאת משוואת הישר:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0 \quad (1.18)$$

(כאן (x_1, y_1) – נקודה כלשהי הנמצאת על הישר).

כדי להבין כיצד התקבלה המשוואה האחרונה שימו לב כי באגף השמאלי שלה רשומה המכפלה הסקלרית של הווקטור $\underline{n} = (a, b)$ הניצב לישר בווקטור $(x - x_1, y - y_1)$. לאחר פתיחת הסוגריים במשוואה האחרונה נקבל את המשוואה הכללית של הישר:

$$ax + by + c = 0$$

שבה $c = -ax_1 - by_1$

נדגים את השימוש בנוסחה (1.18) בסעיף הבא.

אם ידוע כי הישר חותך את ציר ה- x בנקודה $(p, 0)$, את ציר ה- y בנקודה $(0, q)$ ומתקיים: $p \neq 0$ וגם $q \neq 0$, אז בעזרת נוסחאות (1.4) ו-(1.5) אפשר להגיע למשוואה הבאה של הישר:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \quad (1.19)$$

המשוואה האחרונה נקראת **משוואת הישר בקטעים**. בעזרת נוסחה (1.19) אפשר למצוא את משוואת הישר אם הוא לא עובר דרך ראשית מערכת הצירים, לא מקביל לאף אחד מצירי השיעורים וידוע באילו נקודות הישר חותך את הצירים.

לסיום נציין שאם נשווה כל אחד מהאגפים במשוואה (1.16) ל- t ונביע את x ואת y באמצעות t , נקבל:

$$\begin{cases} x = x_1 + u_1 t \\ y = y_1 + u_2 t \end{cases}$$

משוואות אלו נקראות משוואות פרמטריות של הישר.

- הערה 2.** במקום השאלה "כיצד מוצאים את המשוואה של ישר מסוים?" אפשר לשאול "מה עלינו למצוא כדי שנוכל לרשום את משוואת הישר?".
- התשובה לשאלה היא: ברוב המקרים כדי שנוכל לרשום את משוואת הישר עלינו למצוא
- (א) את השיעורים של נקודה כלשהי הנמצאת על הישר ואת השיפוע של הישר (או להראות שהשיפוע לא מוגדר)
 - או
 - (ב) את השיעורים של שתי נקודות הנמצאות על הישר
 - או
 - (ג) את השיעורים של נקודה כלשהי הנמצאת על הישר ואת וקטור הכיוון של הישר
 - או
 - (ד) את השיעורים של נקודה כלשהי הנמצאת על הישר ואת הווקטור הניצב לישר
 - או,
 - (ה) אם הישר לא מקביל לאף אחד מצירי השיעורים ולא עובר דרך ראשית הצירים, יש למצוא את השיעורים של נקודות החיתוך של הישר עם הצירים

תלמידי תיכון רגילים בדרך כלל למצוא את משוואת הישר במישור בדרך הראשונה.

הערה 3. אם נכפיל את משוואה (1.14) במכנה המשותף שלה, ובמשוואה שתתקבל נעביר את הביטוי הרשום באגף הימני לאגף השמאלי עם סימן נגדי, נקבל את המשוואה הבאה:

$$(x_2 - x_1)(y - y_1) - (y_2 - y_1)(x - x_1) = 0 \quad (1.20)$$

מי שידוע כי עבור הדטרמיננטה $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ מתקיים (לפי ההגדרה):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

יכול לרשום את משוואה (1.20) בצורה הבאה:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x - x_1 & y - y_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.21)$$

מי שמתמצא יותר בדטרמיננטות יכול להראות² כי מתקיים:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x - x_1 & y - y_1 \end{vmatrix} \quad (1.22)$$

ולקבל את המשוואה הבאה של הישר העובר דרך הנקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2)

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.23)$$

נציין כי בעזרת נוסחאות (1.21) ו-(1.23) אפשר למצוא גם את משוואות הישרים המקבילים לצירים.

עוד כמה מילים על דטרמיננטות:

² אפשר לקבל את השוויון (1.22) בדרך הבאה: לחסר מהשורות השנייה והשלישית של הדטרמיננטה הרשומה באגף השמאלי של השוויון את השורה הראשונה, ולאחר מכן לפתח את הדטרמיננטה אשר תתקבל לפי העמודה השלישית.

משפט 1. שטח המקבילית הבנויה על הווקטורים $\underline{a}_1 = (a_{11}, a_{12})$ ו- $\underline{a}_2 = (a_{21}, a_{22})$

היוצאים מאותה נקודה שווה ל- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ או ל- $-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$; אם כאשר מסובבים את

הווקטור $\underline{a}_1$ בזווית הקטנה מ- 180° עד שכיוונו יתלכד עם כיוונו של הווקטור $\underline{a}_2$, הסיבוב מתבצע בניגוד לכיוון מחוגי השעון, אז לפני הדטרמיננטה צריך לרשום את הסימן "פלוס"; ואם הסיבוב מתבצע עם כיוון מחוגי השעון, יש לרשום לפני הדטרמיננטה את הסימן "מינוס".

ניעזר במשפט זה כדי לקבל נוסחה לשטח המשולש שקודקודיו (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ו-

(x_3, y_3) . שטח משולש זה שווה למחצית שטח המקבילית הבנויה על הווקטורים

$(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ ו- $(x_3 - x_1, y_3 - y_1)$. מכאן וממשפט 1 נובע כי שטח המשולש שווה ל-

$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$ או ל- $-\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$; אם כאשר מסובבים את הווקטור

$(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ בזווית קטנה מ- 180° עד שכיוונו יתלכד עם כיוונו של הווקטור

$(x_3 - x_1, y_3 - y_1)$, הסיבוב מתבצע בניגוד לכיוון מחוגי השעון, אז לפני הדטרמיננטה צריך

לרשום את הסימן "פלוס"; ואם הסיבוב מתבצע עם כיוון מחוגי השעון צריך לרשום לפני הדטרמיננטה את הסימן "מינוס".

על סמך הנאמר לעיל על שטח המשולש ועל סמך שוויון (1.22) מסיקים כי מתקיים

המשפט הבא:

משפט 2. שטח המשולש שקודקודיו הם הנקודות (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ו- (x_3, y_3) שווה

ל- $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ או ל- $-\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$. את הסימן "פלוס" לפני הדטרמיננטה יש

לרשום כאשר סדר הקודקודים הוא בניגוד לכיוון מחוגי השעון; ואם סדר הקודקודים הוא עם כיוון מחוגי השעון יש לרשום סימן "מינוס".

אפשר להיעזר במשפט זה כדי לקבל הוכחה נוספת של נוסחה (1.23) למשוואת הישר

העובר דרך שתי נקודות. הנקודות (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ו- (x_3, y_3) נמצאות על אותו ישר אך

ורק אם שטח ה"משולש" שהן קודקודיו הוא אפס, כלומר אך ורק אם מתקיים:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

אם בשוויון האחרון נחליף את x_3 ב- x ואת y_3 ב- y נקבל את נוסחה (1.23).

6.2 מנה שנייה

בסעיף זה נפתור את הבעיה הבאה:

בעיה. נתונה מקבילית $ABCD$ ששניים

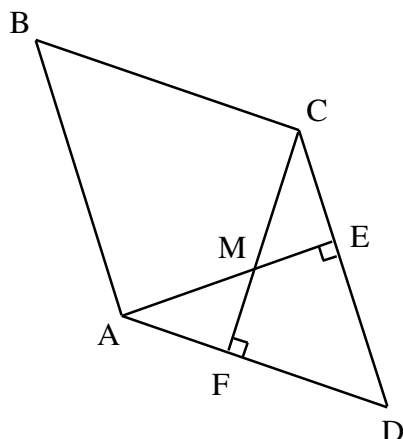
מקודקודיה הם $C(6,15)$ ו- $D(12,-3)$. קטע

AE הוא גובה לצלע CD וקטע CF הוא גובה

לצלע AD . הגבהים CF ו- BD נפגשים בנקודה

$M(3,6)$ (ראו ציור משמאל). מצאו את משוואת

הישר AE



דרך החשיבה ופתרון.

מה צריך למצוא בבעיה זו?

צריך למצוא את משוואת הישר AE .

ומה נתון? למה מהנתון בבעיה יש קשר כלשהו לישר AE ?

נרשום להלן רק את הנתונים שיש להם קשר כלשהו לישר AE .

ובכן, נתונים השיעורים של נקודה M הנמצאת על ישר זה:

$$M(3,6) \quad (2.1)$$

כמו כן נתון כי

$$\text{הקטע } AE \text{ הוא גובה לצלע } CD \text{ במקבילית } ABCD. \quad (2.2)$$

כיצד מוצאים את המשוואה של ישר מסוים?

בעיות רבות מסוג זה פותרים כך:

מוצאים את השיפוע m של הישר ואת השיעורים x_1 ו- y_1 של אחת הנקודות הנמצאות עליו; לאחר מכן מציבים את המספרים שנמצאו בנוסחה הבאה למשוואה של ישר עם שיפועו m ואשר עובר דרך הנקודה (x_1, y_1) :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

בהסתמך על נוסחה זו מסיקים כי

$$\ell_{AE}: y - y_M = m_{AE}(x - x_M) \quad (2.3)$$

ברשותנו השוויונים הבאים:

$$x_M = 3, \quad y_M = 6 \quad (\text{ראו שורה (2.1)}) \quad (2.4)$$

עלינו למצוא את השיפוע m_{AE} של הישר AE . הבה נתבונן בטענה (2.2). ממנה נובע כי הישרים AE ו- CD מאונכים זה לזה:

$$AE \perp CD$$

לכן אילו היינו יודעים מהו גודלו של השיפוע m_{CD} של הישר CD , היינו יכולים לחשב את השיפוע m_{AE} של הישר AE לפי השוויון הבא:

$$m_{AE} = -\frac{1}{m_{CD}} \quad (2.5)$$

לאחר מכן, כדי לקבל את משוואת הישר AE נותר רק להציב את שיפועו ואת שיעורי הנקודה M בנוסחה (2.3).

כעת נתמקד בניסיון לחשב את השיפוע של הישר CD . נשאל את עצמנו: מה נתון? מה מהנתון בבעיה יכול לעזור לנו לחשב את השיפוע m_{CD} של הישר CD ?

בין היתר נתונים השיעורים של שתי נקודות הנמצאות על הישר CD , שיעורי הנקודות

C ו- D :

$$C(6, 15) \quad (2.6)$$

$$D(12, -3) \quad (2.7)$$

לכן נוכל למצוא את השיפוע m_{CD} של הישר CD בעזרת השוויון

$$m_{CD} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C}$$

(ראו נוסחה (1.5) בסעיף הקודם). נציב בשוויון האחרון לפי השוויונים :

$$x_C = 6, \quad y_C = 15, \quad x_D = 12, \quad y_D = -3 \quad \text{(ראו את השורות (2.6) ו-(2.7))}$$

ונקבל :

$$m_{CD} = \frac{-3 - 15}{12 - 6} = \frac{-18}{6} = -3 \quad (2.8)$$

כעת נוכל להציב בשוויון (2.5) לפי שורה (2.8), ולקבל :

$$m_{AE} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3} \quad (2.9)$$

לאחר שנציב בנוסחה (2.3) את ערך השיפוע m_{AE} אשר כעת מצאנו ואת שיעורי הנקודה

M (ראו שורה (2.4)), נקבל עבור הישר AE את המשוואה הבאה :

$$y - 6 = \frac{1}{3}(x - 3)$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה

$$y = \frac{1}{3}x + 5 \quad (2.10)$$

זאת המשוואה המפורשת של הישר AE .

הערה. אפשר למצוא את משוואת הישר AE בעזרת נוסחה (1.18).

הווקטור $\overrightarrow{CD} = (12-6, -3-15) = (6, -18)$ מאונך לישר AE . כאשר נציב בנוסחה (1.18) את השיעורים של ווקטור זה ואת השיעורים של הנקודה $M(3, 6)$ (את השיעורים של נקודה M נציב במקום x_1 ו- y_1) נקבל עבור הישר AE את המשוואה הבאה:

$$6(x-3) - 18(y-6) = 0$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה (2.10).

6.3 מנה שלישית

בעיה. נתונה מקבילית $ABCD$ ששניים

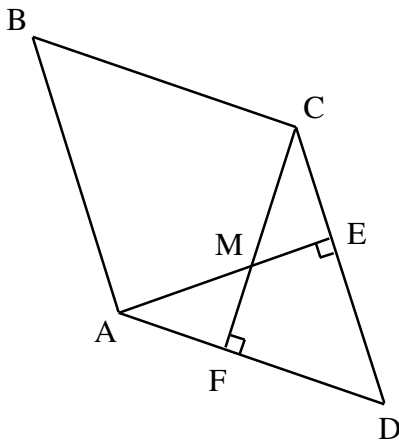
מקודקודיה הם $C(6, 15)$ ו- $D(12, -3)$. קטע

AE הוא גובה לצלע CD , וקטע CF הוא גובה

לצלע AD . הגבהים CF ו- BD נפגשים בנקודה

$M(3, 6)$ (ראו ציור משמאל). מצאו את השיעורים

של נקודה A .



דרך החשיבה ופתרון.

לפני שנתחיל לפתור את בעיה זו נעשה כפי שיוצרים רבים של סדרות טלוויזיה עושים:

נסקור את אירועי הפרקים הקודמים.

הבה ניזכר שבסעיף 6.1 מצאנו את המשוואה המפורשת של הישר CF . המשוואה היא

$$y = 3x - 3 \quad (3.1)$$

בסעיף 6.2 מצאנו את השיפוע של הישר CD ואת המשוואה המפורשת של הישר AE .

קיבלנו כי

$$m_{CD} = -3$$

$$\ell_{AE}: y = \frac{1}{3}x + 5 \quad (3.2)$$

לאחר שרעננו את זיכרוננו, נשאל את עצמנו: מה צריך למצוא בבעיה זו?
צריך למצוא את השיעורים של נקודה A .
כיצד מוצאים את השיעורים של נקודה מסוימת במישור?

בחלק ניכר מבעיות מסוג זה מוצאים את השיעורים הנדרשים כשיעורים של נקודה משותפת לשני קווים במישור. כדי למצוא את שיעורי הנקודה בדרך זו מבצעים את הפעולות הבאות: מוצאים שני קווים העוברים דרך הנקודה ואת משוואות הקווים; פותרים את מערכת המשוואות המורכבת ממשוואות קווים אלה. הנקודה נמצאת על כל אחד משני הקווים העוברים דרכה ולכן שיעוריה מקיימים את המשוואות של כל אחד משני הקווים. מכאן הזוג הסדור של שיעורי הנקודה הוא פתרון מערכת המשוואות המורכבת ממשוואות של שני קווים העוברים דרך הנקודה³.

נשאל את עצמנו שתי שאלות: אילו קווים עוברים דרך נקודה A ? משוואות של אילו שני קווים העוברים דרך הנקודה נמצאים ברשותנו או אפשר למצוא?
דרך נקודה A עוברים הישרים AE , AB ו- AD . את משוואת הישר AE כבר מצאנו (ראו שורה (3.2)). עלינו למצוא את משוואת הישר AB או את משוואת הישר AD . איזו משתי המשוואות עלינו למצוא כעת?

בינתיים לא ידועים לנו שיעורים של נקודה כלשהי הנמצאת על ישר AB . נראה שלא נוכל למצוא את משוואת הישר לפני שנצליח למצוא את השיעורים של נקודה A . לעומת זאת, השיעורים של נקודה D , הנמצאת על ישר AD , ידועים לנו. לפי הנתון

$$D(12, -3) \quad (3.3)$$

אם נצליח למצוא את השיפוע של ישר AD , נוכל גם למצוא את משוואת הישר.
מה אפשר לומר על הישר AD ושיעזור למצוא את שיפועו?
כדי לענות על שאלה זו, נשאל: למה מהנתון בבעיה וממה שכבר מצאנו יש קשר לישר AD ?
לפי הנתון בבעיה

הקטע CF הוא גובה לצלע AD במקבילית $ABCD$.

מכאן הישרים CF ו- AD מאונכים זה לזה:

³ למערכת משוואות זו יכולים להיות פתרונות נוספים.

$$CF \perp AD$$

לכן

$$m_{AD} = -\frac{1}{m_{CF}} \quad (3.4)$$

את השיפוע m_{CF} של הישר CF כבר חישבנו. קיבלנו כי

$$m_{CF} = 3 \quad (3.5)$$

נציב בשוויון (3.4) על פי שוויון (3.5), ונקבל:

$$m_{AD} = -\frac{1}{3} \quad (3.6)$$

נמצא את משוואת הישר AD לפי הנוסחה:

$$y - y_D = m_{AD}(x - x_D)$$

נציב בנוסחה האחרונה לפי שורות (3.3) ו-(3.6), ונקבל את המשוואה הבאה של הישר AD :

$$y - (-3) = -\frac{1}{3}(x - 12)$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה הבאה:

$$y = -\frac{1}{3}x + 1 \quad (3.7)$$

כדי למצוא את השיעורים של נקודה A נותר לפתור את מערכת המשוואות

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 5 \\ y = -\frac{1}{3}x + 1 \end{cases}$$

המורכבת ממשוואה (3.2) של הישר AE וממשוואה (3.7) של הישר AD .

מערכת המשוואות האחרונה שקולה למערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x + 5 = -\frac{1}{3}x + 1 \\ y = -\frac{1}{3}x + 1 \end{cases} \quad (3.8)$$

נפתור את המשוואה הראשונה של מערכת משוואות זו:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x + 5 &= -\frac{1}{3}x + 1 \quad / \cdot 3 \\ \Downarrow \\ x + 15 &= -x + 3 \\ \Downarrow \\ 2x &= -12 \\ \Downarrow \\ x &= -6 \end{aligned} \quad (3.9)$$

מצאנו את שיעור ה- x של הנקודה A . קיבלנו כי

$$x_A = -6 \quad (3.10)$$

נציב במשוואה השנייה של מערכת משוואות (3.8) לפי שורה (3.9), ונמצא את שיעור ה- y של נקודה זו:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{3} \cdot (-6) + 1 \\ \Downarrow \\ y &= 3 \end{aligned}$$

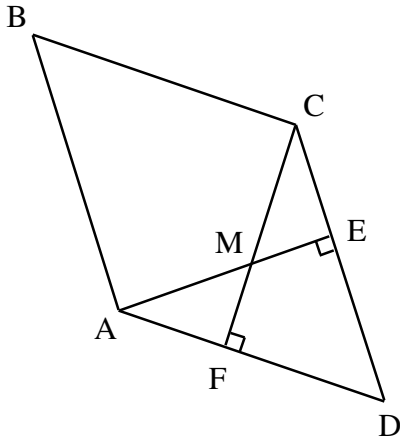
מצאנו את שיעור ה- y של נקודה A . קיבלנו כי

$$y_A = 3 \quad (3.11)$$

כעת ברשותנו שני השיעורים של נקודה A . קיבלנו כי

$$A(-6, 3)$$

6.4 מנה רביעית



בעיה. נתונה מקבילית $ABCD$ ששנייה מקודקודיה הם $C(6,15)$ ו- $D(12,-3)$. קטע AE הוא גובה לצלע CD , וקטע CF הוא גובה לצלע AD . הגבהים CF ו- BD נפגשים בנקודה $M(3,6)$ (ראו ציור משמאל). מצאו את המשוואה של הצלע AB .

דרך החשיבה ופתרון.

בשלושת הסעיפים הקודמים קיבלנו כי

$$\ell_{CF}: y = 3x - 3$$

$$m_{CD} = -3 \quad (4.1)$$

$$\ell_{AE}: y = \frac{1}{3}x + 5$$

ומצאנו את השיעורים של נקודה A . קיבלנו:

$$A(-6, 3) \quad (4.2)$$

כעת אנחנו מוכנים למשימה חדשה.

כרגיל נתחיל בשאלה: מה צריך למצוא בבעיה זו?

צריך למצוא את המשוואה של הישר AB .

כיצד מוצאים את המשוואה של ישר מסוים?

לעתים קרובות מוצאים את המשוואה של ישר כך:

מוצאים את השיפוע m של הישר ואת השיעורים x_1 ו- y_1 של אחת הנקודות הנמצאות עליו; לאחר מכן מציבים את המספרים שנמצאו בנוסחה למשוואה של ישר עם שיפועו m ואשר עובר דרך הנקודה (x_1, y_1) :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

את השיעורים של אחת הנקודות הנמצאות על הישר AB , כלומר את השיעורים של נקודה A , כבר מצאנו (ראו את השורה (4.2)).
נסה למצוא את השיפוע m_{AB} של הישר AB . במטרה למצוא את m_{AB} נשאל את עצמנו: במה מהנתון בבעיה עוד לא השתמשנו?⁴
עוד לא השתמשנו בכך שלפי הנתון

$$(4.3) \quad \text{המרובע } ABCD \text{ הוא מקבילית.}$$

מכאן

$$(4.4) \quad AB \parallel CD$$

שני ישרים במישור (שאינם מתלכדים זה עם זה) מקבילים זה לזה אך ורק אם שיפועיהם שווים זה לזה או אם לכל אחד מהישרים שיפוע לא מוגדר. לכן מטענה (4.4) נובע כי

$$(4.5) \quad m_{AB} = m_{CD}$$

את השיפוע של הישר CD כבר מצאנו (ראו שורה (4.1)).
משוויונים (4.1) ו-(4.5) נובע (לפי כלל המעבר) כי

$$(4.6) \quad m_{AB} = -3$$

נוכל למצוא את משוואת הישר AB לפי הנוסחה הבאה:

$$y - y_A = m_{AB}(x - x_A)$$

⁴ כלומר, לא השתמשנו בסעיפים הקודמים.

נציב בנוסחה האחרונה את השיעורים של נקודה A ואת גודלו של m_{AB} אשר מצאנו (ראו שורות (4.2) ו-(4.6)), ונקבל את המשוואה של הישר AB :

$$y - 3 = -3 \cdot (x + 6)$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה הבאה:

$$y = -3x - 15$$

זאת משוואה מפורשת של הישר AB .

6.5 מנה חמישית

בעיה. נתונה מקבילית $ABCD$ ששניים

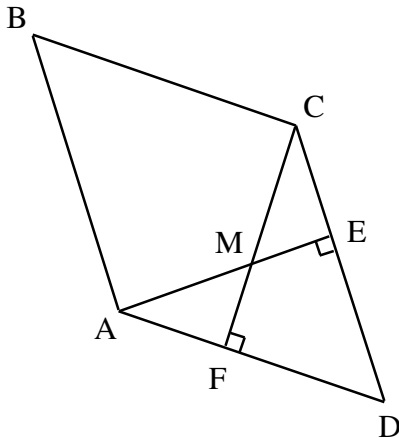
מקודקודיה הם $C(6, 15)$ ו- $D(12, -3)$. קטע

AE הוא גובה לצלע CD , וקטע CF הוא גובה

לצלע AD . הגבהים CF ו- BD נפגשים בנקודה

$M(3, 6)$ (ראו ציור משמאל). מצאו את השיעורים

של נקודה B .



דרך החשיבה ופתרון.

מה צריך למצוא בבעיה זו?

צריך למצוא את השיעורים של נקודה B .

אפשר למצוא את שיעורי הנקודה הזאת כשיעורי נקודת החיתוך של הישרים AB ו-

BC , אך אנחנו נמצא את השיעורים בדרך אחרת, טובה יותר.

לפי הנתון

המרובע $ABCD$ הוא מקבילית.

ברשותנו שיעורים של הקודקודים A , C ו- D של המקבילית:

$$A(-6, 3) \text{ (קיבלנו בסעיף 6.3)} \quad (5.1)$$

$$C(6, 15) \text{ (לפי הנתון)}, \quad (5.2)$$

$$D(12, -3) \text{ (לפי הנתון)}. \quad (5.3)$$

קיים משפט שלפיו: **האלכסונים במקבילית חוצים זה את זה**. לכן נקודת מפגש האלכסונים של המקבילית $ABCD$ היא אמצע של הקטע AC ושל הקטע BD . מכאן, אם נסמן ב- N את נקודת המפגש של האלכסונים המדוברים, נקבל כי עבור שיעוריה מצד אחד מתקיים:

$$x_N = \frac{x_A + x_C}{2} \quad (5.4)$$

$$y_N = \frac{y_A + y_C}{2} \quad (5.5)$$

ומצד שני מתקיים:

$$x_N = \frac{x_B + x_D}{2} \quad (5.6)$$

$$y_N = \frac{y_B + y_D}{2} \quad (5.7)$$

כאשר נציב בארבעת השוויונים האחרונים את שיעורי הנקודות A , C ו- D הידועים לנו (ראו שורות (5.1), (5.2) ו-(5.3)) נקבל את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} x_N = \frac{-6+6}{2} \\ y_N = \frac{3+15}{2} \\ x_N = \frac{x_B+12}{2} \\ y_N = \frac{y_B-3}{2} \end{cases}$$

זאת מערכת של ארבע משוואות עם ארבעת הנעלמים הבאים: x_N, y_N, x_B ו- y_B . היא שקולה למערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} x_N = 0 \\ y_N = 9 \\ x_N = \frac{x_B + 12}{2} \\ y_N = \frac{y_B - 3}{2} \end{cases} \quad (5.8)$$

נציב במשוואה השלישית של המערכת האחרונה לפי המשוואה הראשונה שלה, ונקבל את המשוואה הבאה:

$$0 = \frac{x_B + 12}{2}$$

פתרון המשוואה האחרונה הוא:

$$x_B = -12$$

כעת נציב במשוואה הרביעית של מערכת משוואות (5.8) לפי המשוואה השנייה שלה, ונקבל:

$$9 = \frac{y_B - 3}{2}$$

פתרון המשוואה האחרונה הוא:

$$y_B = 21$$

קיבלנו כי

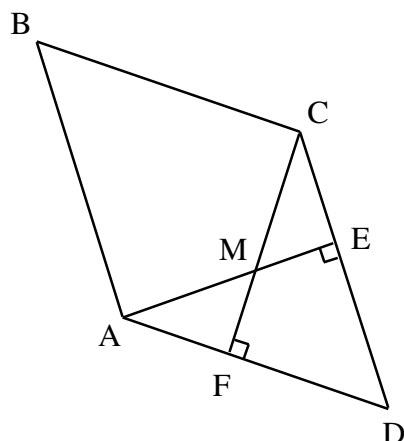
$$B(-12, 21)$$

הערה. שימו לב, היינו צריכים למצוא את x_B ואת y_B , אך לא יכולנו למצוא אותם רק בעזרת המשוואות

$$x_N = \frac{x_B + 12}{2}, \quad y_N = \frac{y_B - 3}{2}$$

אשר התקבלו על סמך השוויונים (5.6) ו-(5.7). היינו צריכים למצוא קודם את x_N ואת y_N . כדי למצוא את השיעורים x_N ו- y_N של נקודה N נעזרנו בשוויונים (5.4) ו-(5.5). פתרון זה לבעיה הוא דוגמה לכך שלפעמים כדי למצוא n נעלמים יש לבחון גם k נעלמים נוספים, ולהרכיב מערכת של $n+k$ משוואות עם $n+k$ נעלמים. נציין שלפעמים אפשר למצוא n נעלמים אם מרכיבים מערכת שבה יהיו $n+k$ נעלמים ומספר המשוואות יהיה קטן מ- $n+k$. לדוגמה, אם עלינו למצוא x וידוע כי מתקיים $x+4y+6z=9$ וגם $2y+3z=4$, אז נוכל לעשות זאת גם בלי לנסות להרכיב את המשוואה השלישית.

6.6 מנה שיטית



בעיה. נתונה מקבילית $ABCD$ ששניים מקודקודיה הם $C(6,15)$ ו- $D(12,-3)$. קטע AE הוא גובה לצלע CD וקטע CF הוא גובה לצלע AD . הגבהים CF ו- BD נפגשים בנקודה $M(3,6)$ (ראו ציור משמאל). ענו על השאלה: האם המקבילית $ABCD$ היא מעוין? נמקו את תשובתכם.

דרך החשיבה ופתרון.

מה אנו מתבקשים לעשות בבעיה זו?
עלינו להוכיח כי

המקבילית $ABCD$ היא מעוין

או להפריך את הטענה.

כיצד בודקים אם מקבילית היא מעוין או לא?

אחת הדרכים לפתרון בעיות מסוג זה היא לבדוק אם שתי צלעות סמוכות במקבילית שוות זו לזו. אם אכן שתי צלעות סמוכות במקבילית שוות זו לזו, המקבילית היא מעוין. אם יתברר כי שתי הצלעות לא שוות זו לזו, המקבילית אינה מעוין.

דרך שנייה לפתרון בעיות מסוג זה היא לבדוק אם האלכסונים במקבילית מאונכים זה לזה. אם אלכסונים במקבילית מאונכים זה לזה, המקבילית היא מעוין. אם אלכסונים במקבילית לא מאונכים זה לזה, המקבילית אינה מעוין.

דרך שלישית לפתרון בעיות מסוג זה היא לבדוק אם האלכסונים במקבילית חוצים את זוויותיה. אם אלכסונים במקבילית חוצים את זוויותיה, המקבילית היא מעוין. אם הם לא חוצים את זוויות המקבילית, המקבילית אינה מעוין.

נפתור את הבעיה בדרך הראשונה. ברשותנו שיעורי כל קודקודי המקבילית $ABCD$:

$$A(-6, 3) \text{ (קיבלנו בסעיף 6.3)}$$

$$B(-12, 21) \text{ (קיבלנו בסעיף 6.5)}$$

$$C(6, 15) \text{ (לפי הנתון),}$$

$$D(12, -3) \text{ (לפי הנתון).}$$

ניעזר רק בשיעורים של שלושה קודקודים של המקבילית : בשיעורים של נקודות A , B ו- D . נחשב את אורכי הצלעות AD ו- BC בעזרת הנוסחה :

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

כאן d הוא מרחק בין נקודה (x_1, y_1) לבין נקודה (x_2, y_2) .
על סמך הנוסחה האחרונה נקבל :

$$AD = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2} = \sqrt{(-6 - 12)^2 + (3 - (-3))^2} =$$

$$= \sqrt{(-18)^2 + 6^2} = \text{יח' } \sqrt{360}$$

$$CD = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2} = \sqrt{(6 - 12)^2 + (15 - (-3))^2} =$$

$$= \sqrt{(-6)^2 + 18^2} = \text{יח' } \sqrt{360}$$

קיבלנו כי

$$AD = \text{יח' } \sqrt{360}$$

וגם

$$CD = \text{יח' } \sqrt{360}$$

מכאן

$$AD = CD$$

לכן

המקבילית $ABCD$ היא מעוין.

תרגיל. פתרו בעצמכם את הבעיה בדרך השנייה ובדרך השלישית שלעיל.

6.7 מנה שביעית

בעיה. נתונה מקבילית $ABCD$ ששניים

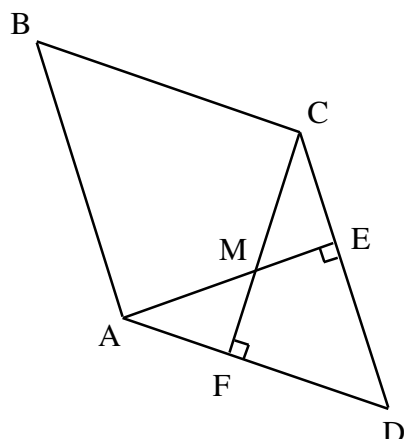
מקודקודיה הם $C(6,15)$ ו- $D(12,-3)$. קטע

AE הוא גובה לצלע CD וקטע CF הוא גובה

לצלע AD . הגבהים CF ו- BD נפגשים בנקודה

$M(3,6)$ (ראו ציור משמאל).

מצאו את היקף המקבילית $ABCD$ ואת שטחה.



דרך החשיבה ופתרון.

מה צריך למצוא בבעיה זו?

צריך למצוא את היקף המקבילית $ABCD$ ואת השטח שלה.

נמצא קודם את ההיקף L_{ABCD} של המקבילית.

מהו ההיקף של מקבילית?

ההיקף של מקבילית הוא סכום אורכי הצלעות של המקבילית.⁵

⁵ היקף של מצולע הוא סכום אורכי הצלעות של המצולע.

בפרק הקודם קיבלנו כי

המקבילית $ABCD$ היא מעוין שאורך צלעו $\sqrt{360}$ יח'.

במילים אחרות קיבלנו כי

המקבילית $ABCD$ היא מרובע שאורך כל אחת מצלעותיו היא $\sqrt{360}$ יח'.

לכן

$$L_{ABCD} = 4AD = 4\sqrt{360} = 4\sqrt{36} \cdot \sqrt{10} = 16\sqrt{10} \approx 50.596 \text{ יח'}$$

כעת נחשב את שטח המקבילית $ABCD$. מקבילית זו היא מעוין. לכן נשאל את עצמנו:

כיצד מחשבים שטח של מעוין?

אחת הדרכים לפתרון בעיות מסוג זה היא להיעזר במשפט: **השטח של מעוין שווה**

למחצית המכפלה של אלכסוניה⁶. לפי משפט זה מתקיים:

$$S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} \quad (7.1)$$

ברשותנו השיעורים של כל קודקודי המעוין $ABCD$:

$$A(-6, 3) \text{ (קיבלנו בסעיף 6.3)}$$

$$B(-12, 21) \text{ (קיבלנו בסעיף 6.5)}$$

$$C(6, 15) \text{ (לפי הנתון),}$$

$$D(12, -3) \text{ (לפי הנתון).}$$

נוכל לחשב את אורכי הקטעים AC ו- BD בעזרת הנוסחה

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

כאן d הוא מרחק בין נקודה (x_1, y_1) לבין נקודה (x_2, y_2) .

על סמך הנוסחה האחרונה נקבל:

⁶ כאשר מדברים על מכפלת אלכסונים של מעוין (או מצולע אחר) מתכוונים למכפלת אורכי האלכסונים.

$$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(-6-6)^2 + (3-15)^2} =$$

$$= \sqrt{(-12)^2 + 12^2} = \sqrt{2 \cdot 12^2} = 12\sqrt{2} \text{ יח'}$$

$$BD = \sqrt{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2} = \sqrt{(-12-12)^2 + (21-(-3))^2} =$$

$$= \sqrt{(-24)^2 + 24^2} = \sqrt{2 \cdot 24^2} = 24\sqrt{2} \text{ יח'}$$

קיבלנו כי

$$AC = 12\sqrt{2} \text{ יח'}$$

$$BD = 24\sqrt{2} \text{ יח'}$$

נציב בשוויון (7.1) לפי שני השוויונים האחרונים, ונקבל:

$$S_{ABCD} = \frac{(12\sqrt{2}) \cdot (24\sqrt{2})}{2} = \frac{12 \cdot 24 (\sqrt{2})^2}{2} =$$

$$= \frac{12 \cdot 24 \cdot 2}{2} = 12 \cdot 24 = 288 \text{ יח"ר}$$

נחשב את שטח המקבילית בדרך אחרת. הפעם לא נסתמך על כך שהמקבילית היא מעיון. ניעזר במשפט: **השטח של מקבילית שווה למכפלת צלע המקבילית בגובה המורד לאותה צלע**. לפי משפט זה מתקיים:

$$S_{ABCD} = CD \cdot AE \quad (7.2)$$

בסעיף הקודם קיבלנו כי

$$CD = \sqrt{360} \text{ יח' } \quad (7.3)$$

כדי שנוכל לחשב את שטח המקבילית בעזרת השוויון (7.2) עלינו למצוא את אורך הקטע AE . אפשר לעשות זאת בדרכים שונות. אחת הדרכים היא למצוא את שיעורי נקודה E ולאחר מכן למצוא את המרחק בין נקודה זו לנקודה A . כדי למצוא את שיעורי נקודה E צריך למצוא את משוואת הישר CD ולאחר מכן לפתור את מערכת המשוואות המורכבת

ממשוואות הישרים CD ו- AE . את המשוואה המפורשת של הישר AE מצאנו בסעיף 6.2.

נחשב את אורך הקטע AE בדרך אחרת. ניעזר בנוסחה לחישוב מרחק בין נקודה לישר:

$$d(P, \ell) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (7.4)$$

כאן $a^2 + b^2 \neq 0$ ו- $d(P, \ell)$ הוא מרחק בין נקודה $P(x_1, y_1)$ לישר $\ell: ax + by + c = 0$. את המרחק בין נקודה לישר מגדירים כאורך האנך המורד מנקודה לישר. לכן המרחק בין נקודה A לישר CD הוא אורך הקטע AE . אם ברצוננו לחשב את אורך הקטע AE בעזרת נוסחה (7.4), עלינו למצוא משוואה כללית של הישר CD . נעשה זאת, אך קודם נמצא משוואה של הישר לפי הנוסחה

$$y - y_C = m_{CD}(x - x_C) \quad (7.5)$$

לפי הנתון

$$x_C = 6, \quad y_C = 15 \quad (7.6)$$

ולפי סעיף 6.2 קיבלנו כי

$$m_{CD} = -3 \quad (7.7)$$

נציב בנוסחה (7.5) לפי שורות (7.6) ו-(7.7), ונקבל את המשוואה הבאה של הישר CD :

$$y - 15 = -3(x - 6)$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה הכללית של הישר CD :

$$3x + y - 33 = 0$$

כדי למצוא את המרחק מנקודה $A(-6, 3)$ לישר CD בעזרת נוסחה (7.4) נציב בה לפי

השוויונים:

$$a = 3, b = 1, c = -33, \quad x_1 = -6, y_1 = 3$$

נקבל:

$$d(A, l_{CD}) = \frac{|3 \cdot (-6) + 1 \cdot 3 - 33|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{48}{\sqrt{10}} = \frac{48\sqrt{10}}{10} = 4.8\sqrt{10} \text{ יח'}$$

מכאן

$$AE = 4.8\sqrt{10} \text{ יח'} \quad (7.8)$$

אפשר לקבל את השוויון האחרון גם בעזרת נוסחה לחישוב מרחק בין ישרים מקבילים. מגדירים מרחק בין שני ישרים מקבילים כמרחק בין נקודה שרירותית כלשהי הנמצאת על אחד הישרים לישר השני. כלומר מרחק בין שני ישרים מקבילים הוא אורך האנך המורד מנקודה שרירותית כלשהי הנמצאת על אחד הישרים לישר השני. מכאן מרחק בין הישרים המקבילים AB ו- CD הוא אורך האנך AE המורד לישר CD מנקודה A , הנמצאת על ישר AB .

מרחק $d(\ell_1, \ell_2)$ בין ישרים מקבילים $\ell_1: ax + by + c_1 = 0$ ו- $\ell_2: ax + by + c_2 = 0$ אפשר לחשב בעזרת הנוסחה

$$d(\ell_1, \ell_2) = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (7.9)$$

בסעיף 6.2 קיבלנו את המשוואה של הישר AB :

$$y = -3x - 15$$

היא שקולה למשוואה הבאה:

$$3x + y + 15 = 0$$

זאת משוואה כללית של ישר AB .

קיבלנו את המשוואה הכללית הבאה של ישר CD :

$$3x + y - 33 = 0$$

כדי לחשב את המרחק בין ישרים מקבילים AB ו- CD בעזרת נוסחה (7.9) נציב בה

לפי השוויונים הבאים:

$$a = 3, b = 1, \quad c_1 = 15, c_2 = -33$$

נקבל:

$$d(\ell_{AB}, \ell_{CD}) = \frac{|115 - (-33)|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{48}{\sqrt{10}} = \frac{48\sqrt{10}}{10} = 4.8\sqrt{10} \text{ יח'}$$

מכאן נובע כי

$$AE = 4.8\sqrt{10} \text{ יח' (זהו שוויון (7.8) אשר קיבלנו קודם בדרך אחרת)}$$

כעת אפשר לחשב את שטח המקבילית $ABCD$ בעזרת שוויון (7.2). נציב בשוויון זה לפי

השוויונים (7.3) ו-(7.8), ונקבל:

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= (\sqrt{360})(4.8\sqrt{10}) = (6\sqrt{10})(4.8\sqrt{10}) = \\ &= (6 \cdot 4.8)(\sqrt{10})^2 = 6 \cdot 4.8 \cdot 10 = 6 \cdot 48 = 288 \text{ יח'"} \end{aligned}$$

הערה. אפשר לחשב את שטח המקבילית $ABCD$ גם בדרך הבאה: ראשית למצוא את

הווקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{AD}$, ולאחר מכן להיעזר במשפט 1 מהערה 3 בסעיף 6.2.

דרך נוספת לחישוב שטח המקבילית היא לחשב את שטח המשולש ABC בעזרת משפט

2 מהערה 3 בסעיף 6.2 ולהכפיל אותו ב-2.

7. היא בפנים

בסופרמרקט לא התפתיתי מיופיים של הענבים השחורים. ידעתי שהם עם גרעינים, ורציתי בלי. עברתי אל הארגזים עם הענבים הירוקים. ליד אחד מהם עמד קונה אשר הכניס לפיו ענב אחר ענב. להערכתי, הוא היה בערך כבן שמונים.

שאלתי אותו: "ענבים אלו ללא גרעינים?"

"הענבים עם הגרעינים נמצאים שם," השיב האיש, תוך שהוא מצביע על הארגזים עם הענבים השחורים.

"אינני רוצה ענבים עם גרעינים. הגד נא לי, האם הענבים שאתה טועם הם ללא גרעינים?"

פניו של האיש הביעו מבוכה והוא משך בכתפיו. קשה להאמין, אך האיש לא ידע האם יש גרעינים בענבים שאכל. הוא השליך ענב נוסף לפיו. שמתי לב שבזמן שלעס את הענב, עיניו הורמו אל התקרה. דומה היה כי הוא שקוע כולו בניסיון למצוא את התשובה לשאלתי.

"נו, יש גרעינים בענבים או לא?" שאלתי בסבלנות.

ושוב הבעת מבוכה על פניו ומשיכת כתפיים. ... ועוד ענב נשלך לפיו ...

גם אנוכי טעמתי ענב. הוא היה בלי גרעינים. שמתי קופסת ענבים בעגלתי והלכתי. כאשר התרחקתי מעט מהזקן, הסתכלתי עליו. הוא המשיך להכניס ענבים לפיו, להרים את עיניו אל התקרה ולמשוך בכתפיו. כשעזבתי את הסופרמרקט ראיתי שעדיין הזקן מנסה, אך ללא הועיל, לברר האם יש גרעינים בענבים.

אל תלעגו לאיש, ולו רק בשל גילו המופלג. סיבה נוספת, לפני שאתם שופטים אנשים אחרים, כדאי שתתבוננו במראה. קרוב לוודאי, שלא אחת קרה ש"לעסתם" ו"לעסתם" מבלי שתחושו את ה"גרעין". במקרה של הזקן הוא לפחות נהנה מה"מחקר".

בעיה. נתונות נקודות $A(1,7)$, $B(14,5)$ ו- $C(16,4)$. הוכיחו כי נקודה $D(7,6)$ נמצאת בתוך המשולש ABC .

דרך החשיבה ופתרון.

מה צריך להוכיח?

צריך להוכיח כי נקודה $D(7,6)$ נמצאת בתוך המשולש שקודקודיו הם הנקודות $A(1,7)$, $B(14,5)$ ו- $C(16,4)$.

כיצד אפשר להוכיח כי נקודה מסוימת נמצאת בתוך משולש?
 כדי לענות על שאלה זו נשאל את עצמנו: מה אפשר לומר על משולשים שיעזור לנו להגיע לפתרון? באיזו תכונה של משולשים אפשר להיעזר כדי להוכיח שנקודה מסוימת נמצאת בתוך משולש מסוים?

כל משולש הוא מצולע קמור. מצולע קמור הוא מצולע שעבור כל צלעותיו מתקיים התנאי הבא: אם נעביר ישר דרך הצלע, יימצא המצולע כולו (פרט לאותה צלע) מצדו האחד של הישר. אם ידועים שיעורי קודקודיו של המצולע, אז כדי לבדוק אם המצולע קמור די לבדוק עבור כל אחת מצלעותיו אם כל קודקודיו (פרט לקצות הצלע) נמצאים מצדו האחד של הישר העובר דרך הצלע. נוסף על כך נציין כי משולשים, מקביליות, טרפזים ומצולעים משוכללים הם כולם מצולעים קמורים.
 אפשר להוכיח שנקודה מסוימת נמצאת בתוך מצולע קמור מסוים בדרך הבאה: להוכיח עבור כל אחת מצלעות המצולע שאותה נקודה וקודקוד כלשהו של המצולע שאינו מתלכד עם אף אחד מקצות הצלע - שניהם נמצאים מצדו האחד של הישר העובר דרך הצלע.
 על סמך הנאמר לעיל מסיקים כי נקודה D נמצאת בתוך המשולש ABC אך ורק אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

$$(1) \quad \text{הנקודות } C \text{ ו- } D \text{ נמצאות מצדו האחד של הישר } AB;$$

$$(2) \quad \text{הנקודות } B \text{ ו- } D \text{ נמצאות מצדו האחד של הישר } AC;$$

$$(3) \quad \text{הנקודות } A \text{ ו- } D \text{ נמצאות מצדו האחד של הישר } BC.$$

כיצד אפשר להוכיח כי שתי נקודות נמצאות מצדו האחד של ישר מסוים?

אם משוואת הישר היא $x = x_1$ (הישר מאונך לציר ה- x), אז שתי נקודות נמצאות מצד אחד שלו אך ורק אם שיעורי ה- x של הנקודות שניהם גדולים מ- x_1 או שניהם קטנים מ- x_1 . אם שיפוע הישר מוגדר, אז שתי נקודות נמצאות מצד אחד שלו אך ורק אם שתיהן נמצאות מעל הישר או אם שתיהן נמצאות מתחתיו.
 וכיצד אפשר לברר אם נקודה מסוימת נמצאת מעל ישר מסוים ששיפועו מוגדר, מתחת לישר זה או על הישר?

כדי לברר אם נקודה מסוימת נמצאת על ישר מסוים מציבים את שיעורי הנקודה במשוואת הישר; אם מתקבל פסוק אמת, אז הנקודה נמצאת על הישר, ואם מתקבל פסוק שקר, הנקודה לא נמצאת על הישר.

אך זו אינה תשובה מלאה לשאלה ששאלנו. הרי אם נפעל בדרך זו ונקבל כי הנקודה לא מונחת על הישר, עדיין לא נוכל לומר אם היא נמצאת מעליו או מתחתיו.

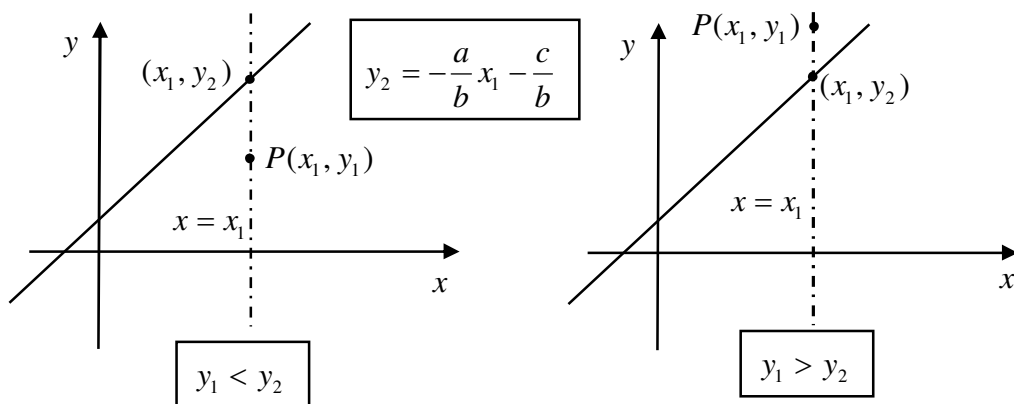
כדי להגיע לתשובה מלאה, נשאל את עצמנו: מהו פירוש הביטוי: "נקודה $P(x_1, y_1)$ נמצאת מעל ישר $\ell: ax + by + c = 0$ ($b \neq 0$)" ומהו פירוש הביטוי: "נקודה $P(x_1, y_1)$ נמצאת מתחת לישר $\ell: ax + by + c = 0$ ($b \neq 0$)"?

כדי להבין את משמעות שני הביטויים עלינו להתבונן בנקודת החיתוך של הישר ℓ עם ישר העובר דרך נקודה P ומאונך לציר ה- x . נסמן את שיעור ה- y של נקודת חיתוך זו ב-

y_2 . אם מתקיים: $y_1 > y_2$, אז נקודה P נמצאת מעל הישר ℓ , ואילו אם מתקיים $y_1 < y_2$, אז נקודה P נמצאת מתחת לישר ℓ . (אם $y_1 = y_2$, אז נקודה P נמצאת על הישר ℓ).

משוואת הישר העובר דרך הנקודה $P(x_1, y_1)$ ומאונך לציר ה- x היא:

$$x = x_1$$



המשוואה המפורשת של הישר ℓ היא

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

לכן

$$y_2 = -\frac{a}{b}x_1 - \frac{c}{b} \quad (4)$$

מטענה (4) ומהנאמר לעיל על מיקומה של נקודה $P(x_1, y_1)$ ביחס לישר

$$\ell : ax + by + c = 0 \quad (b \neq 0) \quad \text{נובע כי}$$

- נקודה P נמצאת מעל הישר ℓ אך ורק אם מתקיים :

$$y_1 > -\frac{a}{b}x_1 - \frac{c}{b} \quad (5)$$

- נקודה P נמצאת מתחת לישר ℓ אך ורק אם מתקיים :

$$y_1 < -\frac{a}{b}x_1 - \frac{c}{b} \quad (6)$$

אם $b > 0$, אז אי-שוויון (5) שקול לאי-שוויון

$$ax_1 + by_1 + c > 0$$

ואי-שוויון (6) שקול לאי-שוויון

$$ax_1 + by_1 + c < 0$$

על סמך הנאמר לעיל אפשר להסיק כי

נקודה $P(x_1, y_1)$ נמצאת על ישר $\ell : ax + by + c = 0$ אך ורק אם מתקיים: $ax_1 + by_1 + c = 0$	(7)
---	-----

נקודה $P(x_1, y_1)$ נמצאת מעל ישר $\ell : ax + by + c = 0$ ($b > 0$) אך ורק אם מתקיים: $ax_1 + by_1 + c > 0$	(8)
---	-----

נקודה $P(x_1, y_1)$ נמצאת מתחת לישר $\ell : ax + by + c = 0$ ($b > 0$) אך ורק אם מתקיים: $ax_1 + by_1 + c < 0$	(9)
---	-----

כעת נוכל להוכיח את טענות (1), (2) ו-(3) בשתי דרכים: אפשר להיעזר בטענות (8) ו-(9),

או להסתמך על פירוש הביטוי "נקודה $P(x_1, y_1)$ נמצאת מעל ישר $\ell: ax + by + c = 0$

$(b \neq 0)$ ועל פירוש הביטוי: "נקודה $P(x_1, y_1)$ נמצאת מתחת לישר $\ell: ax + by + c = 0$ $(b \neq 0)$ ".

כך או כך, כדי להוכיח את טענה (1) צריך למצוא קודם כל את משוואת הישר AB ; כדי להוכיח את טענה (2) נצטרך למצוא את משוואת הישר AC ; להוכחת טענה (3) נזדקק למשוואת הישר BC .

נמצא את משוואת הישר AB לפי הנוסחה הבאה:

$$y - y_A = m_{AB}(x - x_A) \quad (10)$$

לשם כך נחשב את שיפוע הישר AB :

$$m_{AB} = \frac{5-7}{14-1} = -\frac{2}{13} \quad (11)$$

נציב בנוסחה (10) לפי שורה (11) ואת השיעורים של נקודה A , ונקבל:

$$y - 7 = -\frac{2}{13}(x - 1)$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה הבאה:

$$y = -\frac{2}{13}x + 7\frac{2}{13} \quad (12)$$

זו משוואה מפורשת של הישר AB . היא שקולה למשוואה הבאה:

$$2x + 13y - 93 = 0 \quad (13)$$

המשוואה האחרונה היא משוואה כללית של הישר AB . נזדקק לה להוכחת טענה (1) בהסתמך על טענה (8) או על טענה (9). שימו לב כי המקדם של y במשוואה (13) הוא מספר חיובי.

נציב את שיעורי הנקודה $C(16, 4)$ בביטוי הרשום באגף השמאלי של משוואה (13)

ונקבל כי ערך הביטוי בנקודה C הוא -9 . לפי טענה (9) מכאן נובע כי

$$\text{הנקודה } C \text{ נמצאת מתחת לישר } AB \quad (14)$$

כעת נציב את שיעורי הנקודה $D(7, 6)$ בביטוי שבאגף השמאלי של משוואה (13) ונקבל

כי ערך הביטוי בנקודה D הוא -1 . לפי טענה (9) מכאן נובע כי

$$\text{הנקודה } D \text{ נמצאת מתחת לישר } AB \quad (15)$$

מטענות (14) ו-(15) נובע כי טענה (1) מתקיימת.

כעת נוכיח את טענות (14) ו-(15) בדרך אחרת. הפעם נסתמך על פירושו של כל אחד

מהביטויים.

נסמן ב- E את נקודת החיתוך של הישר AB עם הישר $x = 16$ (הישר האחרון עובר דרך

הנקודה $C(16, 4)$ ומאונך לציר ה- x). הזוג הסדור של השיעורים של נקודה E הוא פתרון

של המערכת הבאה:

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{13}x + 7\frac{2}{13} \\ x = 16 \end{cases}$$

המשוואה הראשונה במערכת זו היא משוואה מפורשת (12) של הישר AB . אם פותרים

את מערכת המשוואות האחרונה מקבלים כי

$$E(16, 4\frac{9}{13}) \quad (16)$$

שיעור ה- y של נקודה C קטן משיעור ה- y של נקודה E :

$$y_C < y_E$$

מכאן נובע כי טענה (14) מתקיימת.

כעת נסמן ב- F את נקודת החיתוך של הישר AB עם הישר $x = 7$ (הישר האחרון

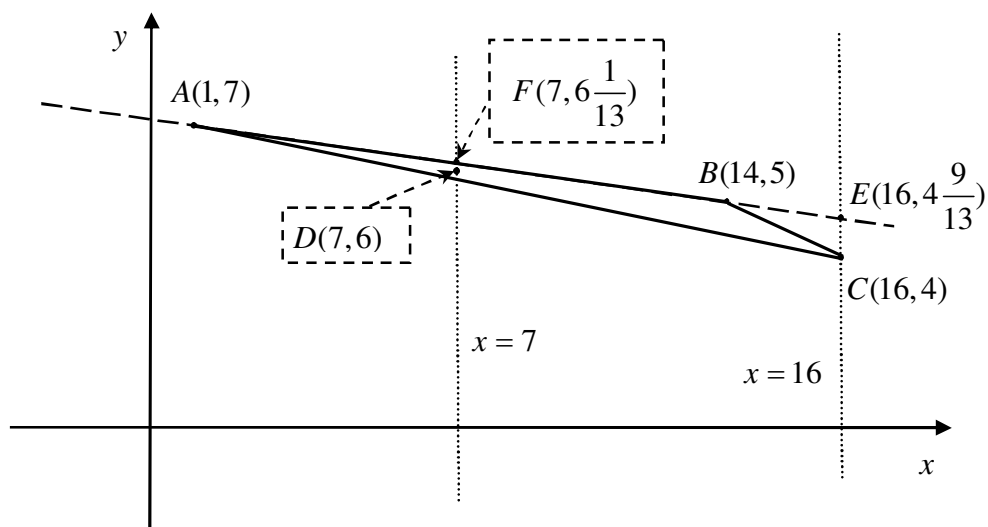
עובר דרך הנקודה $D(7, 6)$ ומאונך לציר ה- x). הזוג הסדור של השיעורים של נקודה F

הוא פתרון של המערכת הבאה:

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{13}x + 7\frac{2}{13} \\ x = 7 \end{cases}$$

אם פותרים את מערכת המשוואות האחרונה מקבלים כי

$$F(7, 6\frac{1}{13}) \quad (17)$$



שיעור ה- y של נקודה D קטן משיעור ה- y של נקודה F :

$$y_D < y_F$$

מכאן נובע כי טענה (15) מתקיימת.

כפי שכבר אמרנו, מטענות (14) ו-(15) נובע כי טענה (1) מתקיימת.

הוכיחו את טענות (2) ו-(3) בעצמכם בתור תרגיל.

מטענות (1), (2) ו-(3) נובע כי נמצאת בתוך המשולש ABC .

מש"ל.

8. לא מפסיקים לשאול: מה זה אמא? מה זה?

What in a name? that which we call a rose
By any other name would as sweet.

(William Shakespeare)

אני המחבר,
איש הקורא לכל דבר בשמו,
הגוזל את ריח הפרחים.
(אלכסנדר בלוק)

כותרת זו ודאי מעוררת תימהון – במה מדובר בפרק זה? מדוע הוא נקרא כך? בפרק "מה זה אמא? מה זה?" בספרי "שיטות חשיבה בהנדסת המישור" כתבתי: "שימוש בהגדרות הוא אחד הכלים החשובים לפתרון בעיות מתמטיות. השאלה 'מה זה?', שילדים קטנים נוהגים לשאול את הוריהם, יכולה לכוון את המחשבות בדרך נכונה ולעזור לפתור בעיות. לעתים כאשר חושבים על השאלה 'מה זה?' מקבלים תשובה לשאלה 'כיצד...?'. גם בגיאומטריה אנליטית השאלה "מה זה?" עוזרת לפתור בעיות. אדגים זאת בפרק הנוכחי.

בעיה. נתון מעגל $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25$, ונתונות נקודות $A(-1,0)$ ו- $B(5,8)$.

הוכיחו כי הקטע AB הוא קוטר במעגל הנתון.

דרך החשיבה ופתרון.

מה צריך להוכיח בבעיה?

צריך להוכיח כי

הקטע AB המחבר את הנקודות $A(-1,0)$ ו- $B(5,8)$ הוא קוטר

(1)

במעגל $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25$

מה זה קוטר של מעגל?

קוטר של מעגל הוא מיתר במעגל אשר עובר דרך מרכז המעגל.¹

כעת מובן שעלינו להוכיח את שתי הטענות הבאות:

הקטע AB המחבר את הנקודות $A(-1,0)$ ו- $B(5,8)$ הוא מיתר במעגל (2)

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25$$

הקטע AB המחבר את הנקודות $A(-1,0)$ ו- $B(5,8)$ עובר דרך מרכז המעגל $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25$. (3)

נוכיח קודם את טענה (2). כדי להבין אותה טוב יותר נשאל את עצמנו: מה זה מיתר במעגל?

מיתר במעגל הוא קטע המחבר שתי נקודות הנמצאות על המעגל. במילים אחרות: מיתר במעגל הוא קטע שקצותיו נמצאים על המעגל. לכן טענה (2) מתקיימת אך ורק אם

הנקודה $A(-1,0)$ נמצאת על המעגל $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25$ (4)

וגם

הנקודה $B(5,8)$ נמצאת על המעגל $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25$ (5)

כיצד בודקים אם נקודה נמצאת על קו מסוים?

מציבים את שיעורי הנקודה במשוואה של הקו. אם יתקבל פסוק אמת, אז הנקודה נמצאת על הקו, ואם יתקבל פסוק שקר, הנקודה לא נמצאת על הקו. וזה מפני שלפי הגדרה, משוואת הקו היא משוואה שכל הנקודות הנמצאות על הקו מקיימות אותה, ואילו כל הנקודות שאינן נמצאות על הקו לא מקיימות אותה.

נוכיח את טענה (4). נציב את השיעורים של נקודה A במשוואה של המעגל הנתון. נקבל:

$$(-1-2)^2 + (0-4)^2 = 25$$

שוויון זה שקול לשוויון² הבא

$$25 = 25$$

¹ גם אורך המיתר העובר דרך מרכז המעגל נקרא קוטר המעגל.

² כאשר אומרים ששוויון אחד שקול לשוויון אחר מתכוונים כי התקיימות השוויון הראשון שקולה להתקיימותו של השוויון השני, כלומר כל אחד משני השוויונים מתקיים אך ורק אם השוויון האחר מתקיים.

השוויון האחרון הוא פסוק אמת. לכן טענה (4) מתקיימת.

נוכיח את טענה (5). נציב את השיעורים של נקודה B במשוואה של המעגל הנתון. נקבל:

$$(5-2)^2 + (8-4)^2 = 25$$

שוויון זה שקול לשוויון הבא

$$. 25 = 25$$

השוויון האחרון הוא פסוק אמת. לכן טענה (5) מתקיימת.

מטענות (4) ו-(5) נובע כי טענה (2) מתקיימת.

כעת נוכיח את טענה (3). נסמן את מרכז המעגל הנתון ב- M , ונשאל את עצמנו: מהם

השיעורים של נקודה M ?

כדי לענות על השאלה האחרונה עלינו להיזכר כי הנוסחה למשוואת המעגל שמרכזו

נקודה (a, b) ושהרדיוס שלו R היא

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \quad (6)$$

אם שוכחים את הנוסחה, אפשר להגיע אליה מחדש אם שואלים: מה זה מעגל?

מעגל שמרכזו נקודה (a, b) ורדיוסו R הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות (x, y)

במישור שמרחקן מהנקודה (a, b) שווה ל- R . מכאן ומהנוסחה

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

לחישוב מרחק בין שתי נקודות, נובע כי מעגל שמרכזו נקודה (a, b) ורדיוסו R הוא

המקום הגיאומטרי של כל הנקודות (x, y) במישור המקיימות את המשוואה הבאה:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$$

כאשר נעלה את שני האגפים של המשוואה האחרונה בריבוע נקבל את משוואה (6).

כעת נשאל את עצמנו: מהי המשוואה של המעגל הנתון?

משוואת המעגל הנתון היא

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25 \quad (7)$$

באמצעות השוואה של שתי המשוואות האחרונות מגיעים למסקנה כי

$$a = 2, b = 4$$

קיבלנו כי

$$x_M = 2, y_M = 4 \quad (8)$$

נסיים את פתרון הבעיה בשלוש דרכים שונות.

המשך פתרון א'.

כדי להבין טוב יותר את טענה (3) נשאל את עצמנו: מהו פירוש הביטוי "הקטע AB

עובר דרך מרכז המעגל"?

פירוש הביטוי הוא ש"מרכז המעגל נמצא בתוך הקטע AB , כלומר מרכז המעגל נמצא על

הקטע AB , אך לא מתלכד עם אף אחד מקצותיו".

כעת נשאל את עצמנו: כיצד אפשר להוכיח שנקודה מסוימת נמצאת בתוך קטע מסוים?

אם ידועים שיעורים של שלוש נקודות C, D ו- E כלשהן, וצריך להוכיח שנקודה E

נמצאת בתוך קטע CD , אפשר לעשות זאת בשלבים הבאים: ראשית יש להוכיח כי נקודה

E נמצאת על הישר CD ; לאחר שזה הוכח, נשאר רק להראות כי מתקיים

$$x_C < x_E < x_D \quad \text{או} \quad x_D < x_E < x_C \quad \text{או} \quad y_C < y_E < y_D \quad \text{או} \quad y_D < y_E < y_C$$

$$\cdot y_D < y_E < y_C$$

לפי תוכנית פעולה זו עלינו קודם כל להוכיח כי

$$\text{נקודה } M \text{ נמצאת על הישר } AB. \quad (9)$$

כיצד מוכיחים שנקודה מסוימת נמצאת על ישר העובר דרך שתי נקודות נתונות?

אפשר להוכיח שנקודה מסוימת (למשל נקודה E) נמצאת על ישר העובר דרך שתי

נקודות נתונות (למשל נקודות C ו- D) בשתי הדרכים הבאות: (א) קודם למצוא את

המשוואה של הישר CD ; לאחר מכן להראות כי שיעורי הנקודה E מקיימים את

המשוואה של הישר CD , ולהסיק שהנקודה E נמצאת על הישר CD (ב) להראות

שהשיפוע m_{CD} של הישר CD שווה לשיפוע m_{CE} של הישר CE , או להראות ששני

הישרים מאונכים לציר ה- x .

נוכיח את טענה (9) בדרך הראשונה ולאחר מכן בדרך השנייה.

במטרה למצוא את המשוואה של הישר AB נשאל את עצמנו: כיצד מוצאים את

המשוואה של ישר מסוים?

בעיות מסוג זה פותרים לעתים קרובות בדרך הבאה: מוצאים את השיפוע m של הישר

ואת השיעורים x_1 ו- y_1 של אחת הנקודות הנמצאות עליו; לאחר מכן מציבים את

המספרים שנמצאו בנוסחה הבאה למשוואה של ישר עם שיפועו m ואשר עובר דרך

הנקודה (x_1, y_1) :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

את השיפוע של הישר AB אפשר לחשב לפי הנוסחה

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

נציב בנוסחה זו את השיעורים של הנקודות A ו- B . נקבל:

$$m_{AB} = \frac{8-0}{5-(-1)} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \quad (10)$$

כעת נוכל למצוא את משוואת הישר AB לפי הנוסחה הבאה:

$$y - y_A = m_{AB}(x - x_A)$$

נציב בנוסחה זו את $m_{AB} = \frac{4}{3}$ ואת השיעורים של נקודה A ונקבל את המשוואה הבאה

של הישר AB :

$$y - 0 = \frac{4}{3}(x + 1)$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה הבאה:

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$$

נציב במשוואה האחרונה את השיעורים של נקודה M (ראו שורה (8)), ונקבל:

$$4 = \frac{4}{3} \cdot 2 + \frac{4}{3}$$

שוויון זה שקול לשוויון הבא:

$$4 = 4$$

השוויון האחרון הוא פסוק אמת. מכאן טענה (9) מתקיימת.

כעת נוכיח את טענה (9) בדרך השנייה: נוכיח כי מתקיים:

$$m_{AB} = m_{AM} \quad (11)$$

את השיפוע של הישר m_{AB} כבר מצאנו, קיבלנו כי

$$m_{AB} = \frac{4}{3} \quad (\text{ראו שורה (10)}) \quad (12)$$

נחשב את השיפוע m_{AM} של הישר AM :

$$m_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{4 - 0}{2 - (-1)} = \frac{4}{3} \quad (13)$$

משוויון (12) ומהתוצאה אשר התקבלה בשורה (13) נובע כי שוויון (11) מתקיים. משוויון

(11) נובע כי טענה (9) מתקיימת.

כעת נעבור לשלב השני:

שיעורי ה- x של הנקודות A , B ו- C הם:

$$x_A = -1, \quad x_B = 5, \quad x_M = 2 \quad (14)$$

על סמך שורה (14) מסיקים כי מתקיים:

$$x_A < x_M < x_B \quad (15)$$

מטענות (9) ו-(15) נובע כי נקודה M נמצאת על הישר AB בין הנקודות A ו- B . מכאן

נקודה M נמצאת בתוך הקטע AB , כלומר טענה (3) מתקיימת.

מטענות (2) ו-(3) נובע כי טענה (1) מתקיימת. **מש"ל.**

המשך פתרון ב'.

הוכחנו לעיל את טענה (3) בלי להיעזר בכך שלפני כן הוכחנו את טענה (2), שלפיה

הקטע AB , המחבר את הנקודות $A(-1,0)$ ו- $B(5,8)$, הוא מיתר

$$\text{במעגל } (x-2)^2 + (y-4)^2 = 25;$$

אילו היינו נעזרים בטענה (2) היינו יכולים לדלג על שורות (14) ו-(15). כלומר, לאחר שהוכחנו את טענה (9), שלפיה

הנקודה M נמצאת על הישר AB ,

יכולנו להיזכר כי הוכחנו את טענה (2), ולומר את הדברים הבאים:

אם נקודה כלשהי נמצאת על הישר AB , אז היא נמצאת בתוך מיתר AB אך ורק אם נקודה זו נמצאת בתוך המעגל הנתון. נקודה M נמצאת בתוך המעגל, ולכן טענה (3) מתקיימת. מטענות (2) ו-(3) נובע כי טענה (1) מתקיימת. **מש"ל**.

להוכחה הראשונה של טענה (3) הגענו לאחר ששאלנו את עצמנו: כיצד אפשר להוכיח כי נקודה מסוימת נמצאת בתוך קטע מסוים? להוכחה השנייה של טענה (3) קל יותר להגיע אם שואלים לפחות אחת משתי השאלות הבאות:

- כיצד אפשר להוכיח שנקודה מסוימת נמצאת בתוך קטע מסוים אם הקטע הוא מיתר במעגל מסוים והנקודה היא מרכז המעגל?
- כיצד אפשר להוכיח שנקודה מסוימת נמצאת בתוך קטע מסוים אם הקטע הוא מיתר במעגל מסוים והנקודה נמצאת בתוך המעגל?

המשך פתרון ג'.

נשאל את עצמנו: כיצד אפשר להוכיח שנקודה מסוימת נמצאת בתוך קטע מסוים אם הקטע הוא מיתר במעגל מסוים והנקודה נמצאת בתוך המעגל? נניח שכבר הוכחנו את טענה (3), אילו מסקנות אפשר להסיק בהסתמך על טענה זו? בוודאי נוכל לומר שממנה ומטענה (2) נובע כי

קטע AB הוא קוטר במעגל הנתון

(זו טענה (1) בניסוח אחר).

ומה נובע מהטענה האחרונה?

מטענה זו נובע כי

$$(16) \quad \text{מרכז המעגל הנתון הוא אמצע הקטע } AB.$$

האם מטענה (16) נובע כי טענה (3) מתקיימת?

כן. אם נקודה מסוימת היא אמצע של קטע מסוים, אז היא נמצאת בתוך הקטע. כיצד מוכיחים כי נקודה מסוימת היא אמצע של קטע מסוים? רשימת שיטות לפתרון בעיות מסוג זה בגיאומטריה אוקלידית תוכלו למצוא בפרק 12 בספרי "שיטות חשיבה בהנדסת המישור". בגיאומטריה אנליטית קיימת דרך נוספת להוכיח כי נקודה מסוימת היא אמצע של קטע מסוים. היא מבוססת על שימוש בנוסחות המקשרות בין שיעורים של קצות הקטע לבין השיעורים של אמצע הקטע. לפיהן עבור השיעורים $x_{\text{middle point of } AB}$ ו-

$y_{\text{middle point of } AB}$ של אמצע הקטע AB מתקיים:

$$x_{\text{middle point of } AB} = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_{\text{middle point of } AB} = \frac{y_A + y_B}{2}$$

נציב בשתי נוסחאות אלו את השיעורים של נקודות A ו- B . נקבל:

$$x_{\text{middle point of } AB} = \frac{-1+5}{2} = 2 \quad (17)$$

$$y_{\text{middle point of } AB} = \frac{0+8}{2} = 4 \quad (18)$$

בהסתמך על שורות (8), (17) ו-(18) מסיקים כי לנקודה M ולאמצע הקטע AB יש אותם שיעורים. הנקודות שיש להן אותם שיעורים מתלכדות זו עם זו. לכן נקודה M מתלכדת עם אמצע הקטע AB , כלומר טענה (16) מתקיימת. כפי שאמרנו קודם, מטענה (16) נובע כי טענה (3) מתקיימת, ומטענות (2) ו-(3) נובע כי טענה (1) מתקיימת. **מש"ל.**

הערה. בהוכחה השנייה של טענה (3) נעזרנו בטענה הבאה בלי להוכיח אותה: **אם נקודה כלשהי נמצאת על ישר העובר דרך הנקודות A ו- B הנמצאות על מעגל, אז היא נמצאת בתוך מיתר AB אך ורק אם נקודה זו נמצאת בתוך המעגל הנתון.** אף על פי שאולי לא שמים לב לכך, נעזרים בטענה זו לעתים קרובות בלי להוכיח אותה בפתרון בעיות בגיאומטריה אוקלידית. האם את מה שנראה כמובן מאליו לעין המתבוננת בציור, אפשר גם לנמק בקלות? בדקו זאת. הוכיחו את הטענה בתור תרגיל. רמז: עליכם להיעזר בכך שמעגל שמרכזו נקודה M ורדיוסו R הוא אוסף של כל הנקודות במישור הנמצאות במרחק R מהנקודה M ; הנקודה נמצאת בתוך המעגל אך ורק אם המרחק בינה לבין מרכז המעגל קטן מרדיוס המעגל; הנקודה נמצאת מחוץ למעגל אך ורק אם המרחק בינה לבין מרכז המעגל גדול מרדיוס המעגל.

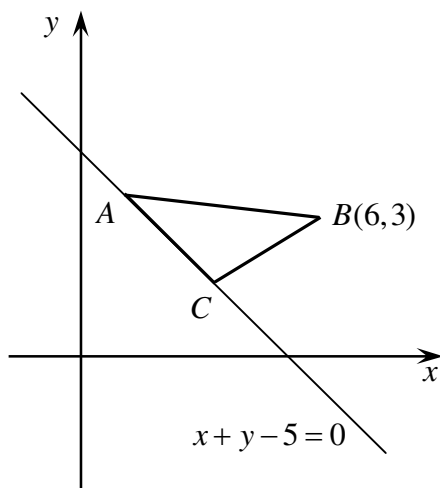
9. ויהי אור¹

... והאֶרֶץ הִיְתָה תֵהוֹ נִבְהוּ וְחֹשֶׁךְ עַל-פְּנֵי תְהוֹם וְרוּחַ אֱלֹהִים מְרַחֶפֶת עַל-פְּנֵי הַמַּיִם. וַיֹּאמֶר אֱלֹהִים יְהי אוֹר וַיְהי-אוֹר. וַיֹּרָא אֱלֹהִים אֶת-הָאוֹר כִּי-טוֹב ...

(בראשית, פרק א')

בעיה

נתון משולש ABC , שקודקודו B נמצא בנקודה $(6,3)$, וצלעו AC נמצאת על ישר שמשוואתו $x + y = 5$. מצאו את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות D במישור המקיימות את התנאי הבא: שטח המשולש ADC גדול פי שניים משטח המשולש ABC .



דרך החשיבה ופתרון.

נשרטט את משולש ABC ,

ונתחיל לשאול את עצמנו שאלות.

ראשית נשאל: מה אנחנו מתבקשים לעשות

בבעיה זו?

אנו מתבקשים למצוא את המקום הגיאומטרי

של כל הנקודות D המקיימות את התנאי הבא:

שטח המשולש ADC גדול פי שניים משטח

המשולש ABC .

כדי להבין את השאלה, עלינו לשפוך אור על כל

המושגים המופיעים בניסוחה.

כאשר מנסים לפתור בעיה מתמטית, יש לברר את משמעותו של כל מושג, הן בנתון בבעיה,

הן בטענה שאותה יש להוכיח והן בגודל שאת ערכו יש לחשב. אם נזכר בבעיה גודל כלשהו

שלחישובו קיימת נוסחה מסוימת, יש לבדוק אם הנוסחה עשויה לעזור לנו לפתור את

הבעיה. לעתים קרובות, כאשר מתרכזים בהבנת המשמעות של מושג כלשהו בניסוח

¹ פרק זה הוא הגרסה המותאמת לגיאומטריה אנליטית של פרק בעל שם זהה בספרי "שיטות חשיבה בהנדסת המישור".

הבעיה, בעזרת השאלות "מה זה?" או "מהי הנוסחה לחישוב גודל זה?", נפתחת הדלת לפתרון הבעיה.

בבעיה הנוכחית עלינו למצוא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות D המקיימות את התנאי הבא: שטח המשולש ADC גדול פי שניים משטח המשולש ABC .
נשאל את עצמנו מהו מקום גיאומטרי. הרי לא נוכל למצוא מקום גיאומטרי מסוים בלי לדעת כלל מהו מקום גיאומטרי.

מקום גיאומטרי של נקודות הוא אוסף כל הנקודות אשר הן, ורק הן, מקיימות תנאי מסוים או תכונה מסוימת.

כעת מובן שאנו מתבקשים למצוא את אוסף כל הנקודות D במישור, אשר הן, ורק הן מקיימות את התנאי, שלפיו שטח המשולש ADC גדול פי שניים משטח המשולש ABC . כיוון שמדובר בשטחים של משולשים, נשאל את עצמנו מהי הנוסחה לחישוב שטח של משולש?

הצורה המילולית לבטא נוסחה זו היא: **שטח משולש שווה למחצית מכפלת צלע בגובה לאותה צלע.**

ניסוח זה אינו מדויק. בנוסחה המדויקת של שטח משולש משתתפים לא צלע וגובה אלא אורכייהם. הניסוח המדויק ארוך יותר, וקשה יותר להיזכר בו. לכן לעתים קרובות כאשר אומרים "צלע" מתכוונים לביטוי "אורך הצלע", אף על פי שזה לא אותו דבר. לפעמים עושים טעות בכוונה, כדי להקל על מאזין או על קורא. בהקשר זה אספר לכם בדיחה ששמעתי פעם, לפני שנים רבות, מאחד ממורי, ואחר כך סיפרתי אותה לכל תלמידי בשיעור הראשון:

"מורה אחד אמר לתלמידיו: אם כתבתי לא נכון ואמרתי נכון, שימו לב למה שאמרתי; אם אמרתי לא נכון וכתבתי נכון, שימו לב למה שכתבתי; אם אמרתי לא נכון וכתבתי לא נכון, שימו לב למה שהתכוונתי".

הנוסח המדויק של הנוסחה לחישוב שטח משולש הוא: **שטח משולש שווה למחצית מכפלת אורך הצלע באורך הגובה לאותה צלע.**

אנחנו יודעים מה הקשר בין השטחים $S_{\Delta ABC}$ ו- $S_{\Delta ADC}$ של המשולשים ABC ו- ADC :

$$S_{\Delta ADC} = 2S_{\Delta ABC} \quad (\text{לפי הנתון}). \quad (1)$$

כאשר חושבים על הנוסחה לחישוב שטח משולש, מתעוררת השאלה: האם קיים קשר כלשהו בין לפחות זוג אחד של צלעות במשולשים אלו?

כן, לשני המשולשים המדוברים יש צלע משותפת: הצלע AC .
 ומה אפשר לומר על הגבהים לצלע AC במשולשים ABC ו- ADC ?
 נסמן את אורך הצלע AC ב- b , את אורך הגובה לצלע AC במשולש ABC ב- h , ואת
 אורך הגובה לצלע זו במשולש ADC ב- h' .
 לפי הנוסחה לחישוב שטח משולש מתקיים:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{b \cdot h}{2} \quad (2)$$

$$S_{\Delta ADC} = \frac{b \cdot h'}{2} \quad (3)$$

כאשר נציב בשוויון (1), לפי שוויונים (2) ו- (3) נקבל:

$$\frac{b \cdot h'}{2} = 2 \cdot \frac{b \cdot h}{2} \quad (4)$$

השוויון האחרון שקול לשוויון הבא:

$$h' = 2h \quad (5)$$

קיבלנו כי תנאי (1) – המגדיר את המקום הגיאומטרי הנדרש – מתקיים אך ורק אם
 אורך הגובה לצלע AC במשולש ADC גדול פי שניים מאורך הגובה לצלע זו במשולש
 ABC .

בכל נוסחה לחישוב גודל כלשהו – הרשום באגף השמאלי של הנוסחה – אפשר להשתמש
 בשני כיוונים. אפשר לחשב את ערך הגודל, אם ידועים הערכים של כל הגדלים המופיעים
 באגף הימני של הנוסחה. בעזרת הנוסחה, אפשר גם להרכיב משוואות עבור הגדלים
 המופיעים באגף הימני של הנוסחה.

גם בהגדרות של מושגים מתמטיים אפשר להשתמש בשני כיוונים. אפשר להיעזר בהגדרה
 של מושג מתמטי המופיע בניסוח הבעיה כדי להבין את משמעותו. ישנם גם מקרים שבהם
 צריך להבחין בביטוי המגדיר מושג מתמטי ידוע, ולזהות את המושג. אם מצליחים להחליף
 את הביטוי במושג שאותו הוא מגדיר, נפתחת אפשרות להיעזר בכל הידוע על מושג זה.
 על סמך שוויון (5), אפשר להסיק שכדי לפתור את הבעיה עלינו למצוא את המקום
 הגיאומטרי של כל הנקודות D במישור שעבורן אורך הגובה לצלע AC במשולש ADC ,
 יהיה גדול פי שניים מאורך הגובה לאותה צלע במשולש ABC .

כעת נשאל את עצמנו: מהו אורך הגובה לצלע AC במשולש ADC ? זהו אורך האנך המורד מנקודה D אל הישר AC . מצד שני, "אורך אנך המורד מנקודה אל ישר" הוא ביטוי שבאמצעותו מגדירים מרחק בין נקודה לישר. לכן המקום הגיאומטרי שעלינו למצוא, הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור שמרחקן מהישר AC שווה ל- $2h$.

וכיצד נחשב את הגודל של h ?

כדי לענות על שאלה זו נשאל את עצמנו: כיצד בכלל אפשר לחשב בגיאומטריה אנליטית את אורך הגובה לצלע מסוימת במשולש מסוים? על סמך הנאמר לעיל אפשר להסיק כי לפתרון בעיות מסוג זה אפשר להיעזר בנוסחה הבאה לחישוב מרחק בין נקודה (x_1, y_1) לישר $ax + by + c = 0$:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (6)$$

(אפשר לפתור בעיות מסוג זה גם בדרך הבאה: למצוא את נקודת החיתוך של הישר שעליו נמצאת הצלע עם הישר שמאונך לישר זה ועובר דרך נקודה B ; ולאחר מכן להיעזר בנוסחה לחישוב מרחק בין שתי נקודות). בעזרת נוסחה (6) מקבלים:

$$h = \frac{|6 + 3 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ יח'}$$

(נעזרנו במשוואה $x + y - 5 = 0$ של הישר AC ובשיעורי הנקודה B).

מכאן ומהנאמר לעיל על המקום הגיאומטרי שעלינו למצוא נובע כי מקום גיאומטרי זה הוא מקום גיאומטרי של כל הנקודות במישור הנמצאות במרחק של $4\sqrt{2}$ יחידות מן הישר $x + y = 5$. בעזרת נוסחה (6) מקבלים כי הנקודה (x, y) שייכת למקום הגיאומטרי האחרון אך ורק אם מתקיים:

$$\frac{|x + y - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 4\sqrt{2}$$

קיבלנו את המשוואה של המקום הגיאומטרי אשר התבקשנו למצוא. היא שקולה למשוואה הבאה:

$$|x + y - 5| = 8$$

נקודה במישור מקיימת את המשוואה האחרונה אך ורק אם היא מקיימת את המשוואה

$$x + y - 5 = 8 \quad (7)$$

או את המשוואה

$$x + y - 5 = -8 \quad (8)$$

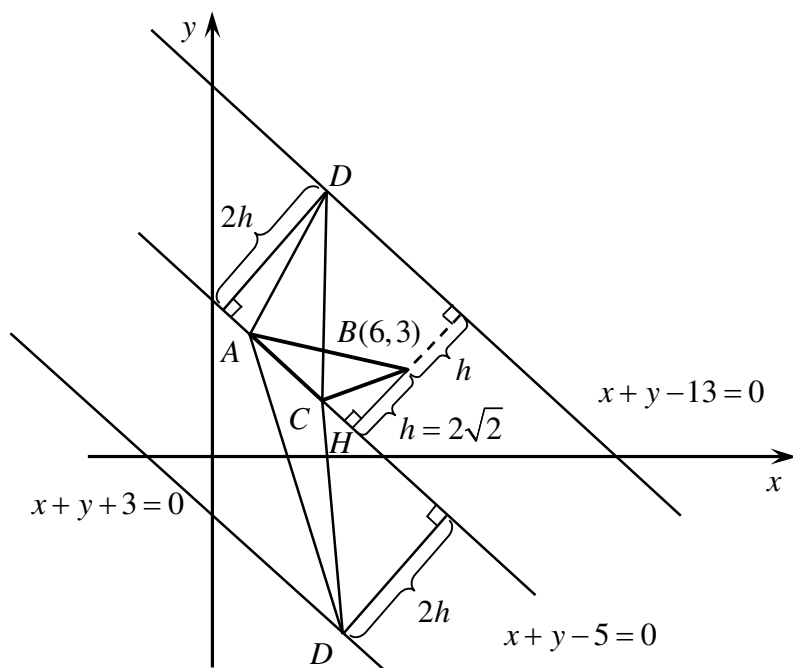
משוואה (7) שקולה למשוואה הבאה:

$$x + y - 13 = 0 \quad (9)$$

ואילו משוואה (8) שקולה למשוואה הבאה:

$$x + y + 3 = 0 \quad (10)$$

מכאן המקום הגיאומטרי אשר התבקשנו למצוא הוא האיחוד של הישרים $\ell_1: x + y - 13 = 0$ ו- $\ell_2: x + y + 3 = 0$. שני הישרים מקבילים לישר AC ונמצאים במרחק של $4\sqrt{2}$ יחידות ממנו.



מש"ל.

10. מחפשים זווית

נסעתי עם בני במכונית, כאשר הוא נהג בה. כשעשה סיבוב פרסה שמעתי לפתע את החבטה של הגלגל האחורי על קצה המדרכה. "עשיתי את סיבוב הפרסה טוב מדי", אמר הבן.

בעיה. נתונים ישרים $\ell_1: y = 3x - 1$ ו- $\ell_2: y = 5x - 3$.

(א) מצאו (עם דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה) את הזווית החדה בין שני הישרים.

(ב) מצאו (עם דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה) את הזווית בין הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2

שבתוכה נמצאת הנקודה $A(2, 6)$.

דרך החשיבה ופתרון לסעיף א'.

מה צריך למצוא בסעיף א' של הבעיה?

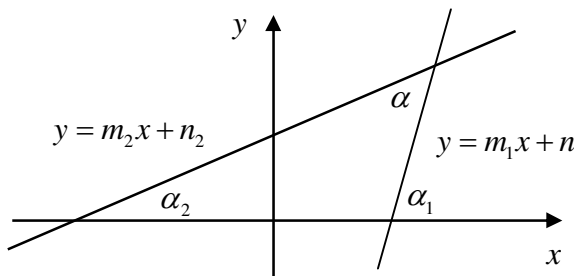
צריך למצוא (עם דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה) את הזווית החדה¹ בין הישרים

$\ell_1: y = 3x - 1$ ו- $\ell_2: y = 5x - 3$.

כיצד מוצאים את הזווית החדה בין שני ישרים מסוימים במישור?

עבור אחת מהזוויות הצמודות בין הישרים $y = m_1x + n_1$ ו- $y = m_2x + n_2$ מתקיים:

$$\tan \alpha = \tan(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2}{1 + \tan \alpha_1 \cdot \tan \alpha_2} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$$



¹ אם שני ישרים נחתכים, הם יוצרים שני זוגות של זוויות קודקודיות. זוויות קודקודיות שוות זו לזו. כל זוג של זוויות לא קודקודיות מתוך ארבע זוויות אלו הן זוויות צמודות, וסכומן שווה ל- 180° . לכן אם שני הישרים לא מאונכים זה לזה, הם יוצרים זוג של זוויות חדות ששוות זו לזו וזוג של זוויות קהות ששוות זו לזו.

אם

$$\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} > 0$$

אז זווית α היא זווית חדה (כלומר $0^\circ < \alpha < 90^\circ$), ואילו אם

$$\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} < 0$$

אז זווית α היא זווית קהה (כלומר $90^\circ < \alpha < 180^\circ$) והזווית $180^\circ - \alpha$ היא הזווית החדה בין שני הישרים. עבור הזווית $180^\circ - \alpha$ מתקיים:

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha = -\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

מכאן את הזווית החדה φ בין ישרים $y = m_1x + n_1$ ו- $y = m_2x + n_2$ אפשר לחשב לפי הנוסחה:

$$\tan \varphi = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right| \quad (1)$$

נציין שאם $1 + m_1 \cdot m_2 = 0$, אז הביטוי $\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$ לא מוגדר. במקרה זה שני הישרים

מאונכים זה לזה. אם $m_1 = m_2$, אז הישרים מקבילים זה לזה או מתלכדים זה עם זה.

השיפוע m_1 של הישר $\ell_1: y = 3x - 1$ הוא

$$m_1 = 3 \quad (2)$$

השיפוע m_2 של הישר $\ell_2: y = 5x - 3$ הוא

$$m_2 = 5 \quad (3)$$

נציב בנוסחה (1) לפי שורות (2) ו-(3), ונקבל:

$$\tan \varphi = \left| \frac{3-5}{1+3 \cdot 5} \right| = \frac{1}{8}$$

מכאן הזווית החדה בין הישרים הנתונים היא

$$\varphi \approx 7.125^\circ$$

מש"ל.

דרך החשיבה ופתרון לסעיף ב'.

מה צריך למצוא בסעיף ב' של הבעיה?

צריך למצוא (עם דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה) את הזווית בין הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2

שבתוכה נמצאת נקודה $A(2, 6)$.

כיצד מחשבים זווית מסוימת מבין הזוויות אשר יוצרים ישרים $y = m_1x + n_1$ ו-

$$y = m_2x + n_2 ?$$

הבה נסובב את השוק של הזווית הנמצאת על הישר $y = m_1x + n_1$ סביב נקודת החיתוך

של שני הישרים, עד שהיא תתלכד עם השוק השנייה של הזווית. ברגעי ביניים, כשהשוק המסתובבת לא נמצאת על אף אחד מהישרים המדוברים, היא (פרט לנקודת החיתוך של שני הישרים) צריכה להיות בתוך הזווית אשר צריך לחשב. אם הסיבוב יתבצע בכיוון סיבוב מחוגי השעון, אז עבור הזווית α אשר צריך לחשב מתקיים:

$$\tan \alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

ואם הסיבוב יתבצע בניגוד לכיוון מחוגי השעון, אז

$$\tan \alpha = -\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

באיזו מנוסחאות אלו עלינו להשתמש לפתרון הבעיה?

נוכל לענות על שאלה זו אם נדע באיזה כיוון עלינו לסובב את השוק של הזווית המדוברת

הנמצאת על הישר $\ell_1: y = 3x - 1$ סביב נקודת החיתוך של ישר זה עם הישר

$\ell_2: y = 5x - 3$, עד שהיא תתלכד עם השוק השנייה של אותה זווית (השוק השנייה של

הזווית נמצאת על הישר ℓ_2). כפי שאמרנו, ברגעי ביניים, כשהשוק המסתובבת לא נמצאת על אף אחד מהישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 , היא (פרט לנקודת החיתוך של שני הישרים) צריכה להיות בתוך הזווית אשר צריך לחשב.

אוסף של כל הנקודות הנמצאות בתוך אחת מארבע הזוויות אשר יוצרים הישרים $\ell_1 : y = 3x - 1$ ו- $\ell_2 : y = 5x - 3$ הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור הנמצאות מעל כל אחד משני הישרים; אוסף של כל הנקודות הנמצאות בתוך הזווית השנייה אשר יוצרים הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור הנמצאות מעל הישר ℓ_1 ומתחת לישר ℓ_2 ; אוסף של כל הנקודות הנמצאות בתוך הזווית השלישית מתוך ארבע הזוויות המדוברות היא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור הנמצאות מתחת לישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 ; אוסף של כל הנקודות הנמצאות בתוך הזווית הרביעית מתוך ארבע הזוויות המדוברות היא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור הנמצאות מתחת לישר ℓ_1 ומעל לישר ℓ_2 . נשאל את עצמנו: בתוך איזו מארבע זוויות אלו נמצאת נקודה $A(2,6)$?

כדי לענות על שאלה זו נעביר דרך נקודה $A(2,6)$ את הישר ℓ_3 , המקביל לציר ה- y . משוואה של ישר זה היא $x = 2$. הוא חותך את הישר ℓ_1 בנקודה $B(2,5)$ ואת הישר ℓ_2 בנקודה $C(2,7)$. מהאי-שוויונים

$$y_B < y_A < y_C$$

נובע כי נקודה $A(2,6)$ נמצאת מעל הישר ℓ_1 ומתחת לישר ℓ_2 . לכן

(4) נקודה A נמצאת בתוך אותה זווית שאוסף כל הנקודות הנמצאות בתוכה הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור הנמצאות מעל הישר ℓ_1 ומתחת לישר ℓ_2 .

נסה לקבל מידע נוסף על אודות זווית זו. קודם כל נמצא את השיעורים של עוד נקודה: נקודת החיתוך של הישרים $\ell_1 : y = 3x - 1$ ו- $\ell_2 : y = 5x - 3$. נסמן נקודה זו ב- D . כאשר נפתור את מערכת המשוואות

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = 5x - 3 \end{cases}$$

נקבל:

$$D(1, 2)$$

מהאי-שוויון

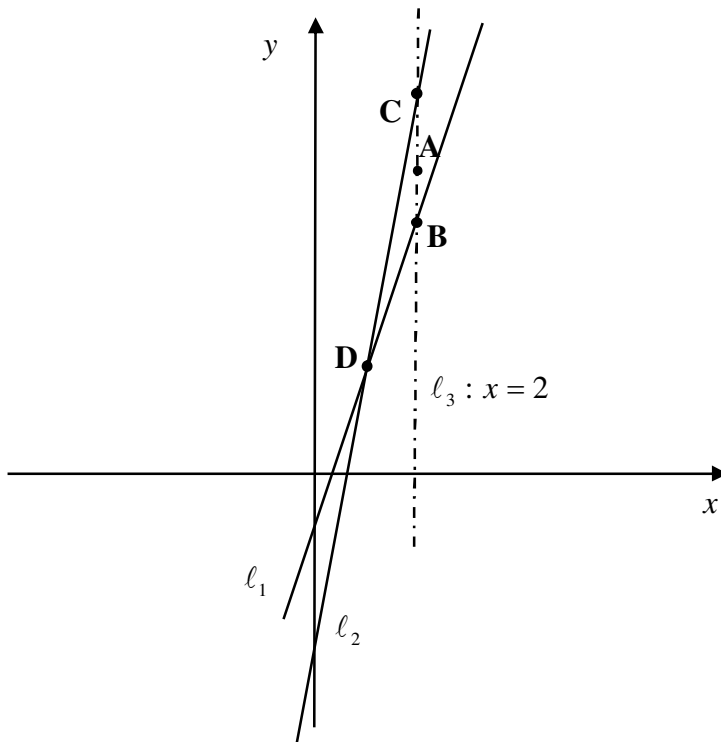
$$y_B < y_C$$

נובע כי

נקודה C נמצאת מעל הישר ℓ_1 ונקודה B נמצאת מתחת לישר ℓ_2 .

מכאן

(5) אוסף של כל הנקודות הנמצאות בתוך הזווית BDC ($\angle BDC < 180^\circ$) הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור הנמצאות מעל הישר ℓ_1 ומתחת לישר ℓ_2 .



מטענות (4) ו-(5) נובע כי

נקודה A נמצאת בתוך הזווית BDC ($\angle BDC < 180^\circ$).

לכן

הזווית אשר אנחנו מתבקשים לחשב בסעיף ב' של הבעיה היא זווית BDC .

כפי שהוכנו לעיל, נקודה C נמצאת מעל הישר ℓ_1 . מכאן ומהאי-שוויון

$$x_D < x_B$$

נובע שאם נסובב סביב נקודה D את הקרן DB עד שהיא תתלכד עם הקרן DC , כך שברגעי ביניים הקרן המסתובבת (פרט לנקודה D) תהיה בתוך הזווית BDC , אז הסיבוב יתבצע נגד כיוון מחוגי השעון. מכאן:

$$\tan(\angle BDC) = \frac{5-3}{1+3 \cdot 5} = \frac{1}{8}$$

מכאן נובע כי הזווית אשר התבקשנו לחשב שווה בערך ל- 7.125° .

אפשר לחשב את הזווית BDC בעזרת השוויון:

$$\cos(\angle BDC) = \frac{\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}}{|\overrightarrow{DB}| \cdot |\overrightarrow{DC}|} \quad (6)$$

בהסתמך על השיעורים של הנקודות B , C ו- D נקבל:

$$\overrightarrow{DB} = (2-1, 5-2) = (1, 3) \quad (7)$$

$$\overrightarrow{DC} = (2-1, 7-2) = (1, 5) \quad (8)$$

בהסתמך על שוויון (6) ועל התוצאות שקיבלנו בשורות (7) ו-(8), נקבל:

$$\cos(\angle BDC) = \frac{1 \cdot 1 + 3 \cdot 5}{\sqrt{1^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 5^2}} = \frac{16}{\sqrt{260}} \approx 0.992278$$

מכאן

$$\angle BDC \approx 7.125^\circ$$

הערה 1. אילו היינו מתבקשים למצוא את הזווית בין הישרים $\ell_1: y = 3x - 1$ ו-

$\ell_2: y = 5x - 3$ שבתוכה נמצאת נקודה $E(2, 8)$ היינו אומרים את הדברים הבאים:

מהאי-שוויונים

$$y_B < y_C < y_E$$

נובע כי נקודה E נמצאת מעל הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 . לכן נקודה E נמצאת בתוך אותה זווית שאוסף כל הנקודות הנמצאות בתוכה הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור הנמצאות מעל הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 .

הזווית שאוסף כל הנקודות הנמצאות בתוכה הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור הנמצאות מעל הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 היא זווית צמודה לזווית שאוסף כל הנקודות הנמצאות בתוכה הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור הנמצאות מעל הישר ℓ_1 ומתחת לישר ℓ_2 , כלומר היא צמודה לזווית BDC . מהנאמר לעיל נובע כי בבעיה זו צריך לחשב את הזווית α הצמודה לזווית BDC . כדי לחשב את הזווית α היה עלינו לחשב קודם את הזווית BDC , כפי שנעשה לעיל, ולאחר מכן היינו משתמשים בשוויון $\alpha = 180^\circ - \angle BDC$.

הערה 2. אחד מכל זוג זוויות צמודות בין ישרים $L_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ו- $L_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ שווה לזווית בין הווקטור $\underline{n}_1 = (a_1, b_1)$ הניצב לישר L_1 לבין הווקטור $\underline{n}_2 = (a_2, b_2)$ הניצב לישר L_2 . לכן את הזווית החדה φ בין ישרים L_1 ו- L_2 אפשר לחשב בעזרת הנוסחה

$$\cos \varphi = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

הערה 3. אוסף כל הנקודות שאינן נמצאות על ישר L , אשר מיוצג על ידי משוואה $ax + by + c = 0$, הוא איחוד של שני חצאי מישורים. עבור כל נקודה באחד מהם מתקיים האי-שוויון $ax + by + c > 0$, ואילו עבור כל נקודה בחצי המישור השני מתקיים האי-שוויון $ax + by + c < 0$. חצי המישור הראשון נקרא חצי מישור חיובי ביחס למשוואה

$ax + by + c = 0$ של הישר L , ואילו חצי המישור השני נקרא חצי המישור השלילי ביחס לאותה משוואה.

אם נכפיל את המשוואה הכללית של הישר במספר שלילי כלשהו, חצי המישור החיובי וחצי המישור השלילי יתחלפו במקומותיהם.

קיים משפט שלפיו: **אם נקודת ההתחלה של הווקטור $\underline{n} = (a, b)$ הניצב לישר**

$L: ax + by + c = 0$ **מונחת על הישר, אז נקודת סוף הווקטור נמצאת בחצי המישור**

החיובי ביחס למשוואה $ax + by + c = 0$ של הישר.

בעזרת משפט זה אפשר לפתור את סעיף ב' של הבעיה מהר יותר מאשר פתרנו אותו לעיל.

נסו למצוא את הפתרון בעצמכם.

חשוב לציין לגבי המשפט האחרון, שהמושג "חצי המישור החיובי" הנזכר בו והמושג

"חצי המישור השלילי" הנזכר לפני כן מעולם לא היו כלולים בתוכנית הלימודים לתלמידי

בתי ספר תיכוניים, ולכן אין להשתמש בהם במבחני הבגרות.

11. בין זוויות שוות

אב שואל את בתו הלומדת בבית ספר יסודי: "להכין לך פיתה שלמה לבית הספר או רק חצי?"

הבת: "חצי פיתה."

"טוב", אומר האב, "אכין לך שני חצאים, אולי מישהו מחבריך יבקש ממך להתחלק עמו ולא יישאר

לך מה לאכול."

הבת: "אז תכין לי, אבא, עשרים וארבעה חצאי פיתות."

"למה רק עשרים וארבעה?" שואל האב וחיוך על פניו, "הרי בכיתה שלך יש שלושים ושלושה

תלמידים."

"תשעה תלמידים מהכיתה לא חברים שלי."

בעיה. נתון משולש ABC . משוואת הישר AB היא $y = 2x - 13$; משוואת הישר AC

היא $y = \frac{1}{2}x + 3$; משוואת חוצה הזווית ABC היא $y = -3x + 22$.

א. מצאו את משוואת המעגל החסום במשולש ABC .

ב. מצאו את משוואת הישר BC .

דרך החשיבה ופתרון לסעיף א'.

מה צריך למצוא בסעיף א' של הבעיה?

צריך למצוא את משוואת המעגל החסום במשולש ABC .

מהי הנוסחה למשוואת המעגל?

הנוסחה למשוואת המעגל שמרכזו $M(a, b)$ ורדיוסו R היא:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \quad (1)$$

מה עלינו למצוא על מנת שנוכל להיעזר בנוסחה זו לפתרון הבעיה?

עלינו למצוא את השיעורים של מרכז המעגל החסום במשולש ABC ואת הרדיוס שלו.

האם קיים משפט גיאומטרי כלשהו שבו מדובר על מרכז מעגל החסום במשולש?

כך. קיים משפט שלפיו: **מרכז המעגל החסום במשולש הוא נקודת המפגש של חוצי הזוויות של המשולש**. אם יהיו ברשותנו משוואות של שני חוצי זוויות במשולש הנתון, אז נוכל למצוא את השיעורים של מרכז המעגל החסום במשולש זה.
מה נתון?

בין היתר נתונה משוואה של חוצה הזווית ABC . המשוואה היא

$$y = -3x + 22$$

עלינו לנסות למצוא משוואה של עוד אחד מחוצי הזוויות במשולש הנתון.
מה עוד נתון בבעיה?

נתונות משוואות של שוקי הזווית BAC ¹. לפי הנתון בבעיה, משוואת הישר AB היא

$$y = 2x - 13 \quad (2)$$

ומשוואת הישר AC היא

$$y = \frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2} \quad (3)$$

כיצד מוצאים את המשוואה של חוצה זווית מסוים אם ידועות המשוואות של שוקי הזווית?

באחת הדרכים לפתרון בעיות מסוג זה נעזרים במשפט שלפיו: **חוצה הזווית הוא המקום הגיאומטרי של כל נקודות הנמצאות במרחקים שווים משוקי הזווית (ומונחות בתוך הזווית)**.

על מנת שנוכל להיעזר במשפט גיאומטרי זה עלינו לדעת לחשב מרחק בין נקודה לישר. כיצד מחשבים מרחק בין נקודה לישר? האם קיימת נוסחה למציאת המרחק בין נקודה לישר?

את המרחק $d(P, \ell)$ בין נקודה $P(x_1, y_1)$ לישר $\ell: ax + by + c = 0$ אפשר לחשב לפי הנוסחה הבאה:

$$d(P, \ell) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (4)$$

משוואה (2) של הישר AB שקולה למשוואה הבאה:

¹ ליתר דיוק: נתונות משוואות של הישרים שעליהם נמצאות שוקי הזווית הזו.

$$-2x + y + 13 = 0 \quad (5)$$

משוואה (3) של הישר AC שקולה למשוואה הבאה:

$$-x + 2y - 7 = 0 \quad (6)$$

לכן אילו היינו מתבקשים למצוא את משוואת המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור הנמצאות במרחקים שווים מהישרים AB ו- AC , היינו אומרים קודם כי מרחק בין נקודה שרירותית $Q(x, y)$ במישור נמצאת במרחק

$$d(Q, \ell_{AB}) = \frac{|-2x + y + 13|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{|-2x + y + 13|}{\sqrt{5}} \quad (7)$$

מהישר AB , ובמרחק

$$d(Q, \ell_{AC}) = \frac{|-x + 2y - 7|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = \frac{|-x + 2y - 7|}{\sqrt{5}} \quad (8)$$

מהישר AC . לאחר מכן היינו אומרים שמשוואות (7) ו-(8) נובע כי השוויון

$$d(Q, \ell_{AB}) = d(Q, \ell_{AC})$$

מתקיים אך ורק אם מתקיים:

$$\frac{|-2x + y + 13|}{\sqrt{5}} = \frac{|-x + 2y - 7|}{\sqrt{5}}$$

מכאן נובע כי המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור הנמצאות במרחקים שווים מהישרים AB ו- AC היא איחוד הישרים:

$$\ell_1: \frac{-2x + y + 13}{\sqrt{5}} = \frac{-x + 2y - 7}{\sqrt{5}} \quad (9)$$

ו-

$$\ell_2: \frac{-2x + y + 13}{\sqrt{5}} = -\frac{-x + 2y - 7}{\sqrt{5}} \quad (10)$$

הישרים AB ו- AC יוצרים ארבע זוויות. באחת מהן חוצה הזווית עובר מעל הישרים AB ו- AC , בשנייה – מעל הישר AB ומתחת לישר AC , בשלישית – מתחת לישרים AB ו- AC , וברביעית – מעל הישר AC ומתחת לישר AB . ישר (9) חוצה שתיים מארבע זוויות אלו; ישר (10) חוצה את שתי הזוויות האחרות. עלינו לברר איזו מארבע הזוויות אשר נוצרו על ידי הישרים AB ו- AC היא זווית BAC במשולש ABC , אחרת לא נוכל לקבוע על איזה מישרים (9) ו-(10) נמצא חוצה הזווית BAC .

כיצד נעשה זאת? אולי עלינו פשוט לשרטט את הישרים AB , AC וחוצה הזווית ABC במערכת הצירים, ולפי השרטוט לקבוע איזו מארבע הזוויות אשר נוצרו על ידי הישרים AB ו- AC היא הזווית BAC במשולש ABC ?

חשוב לציין כי מתמטיקאי יכול להיעזר בשרטוט כדי לאייר את תנאי הבעיה או את רעיונותיו. שרטוט יכול לעזור לו להגיע לרעיון, אך הוא עלול גם להטעות. מתמטיקאי אינו רשאי לומר כי משרטוט נובע כי טענה זו או אחרת מתקיימת.

נקבע איזו מארבע הזוויות אשר נוצרו על ידי הישרים AB ו- AC היא הזווית BAC במשולש ABC בלי לאייר את דברינו בציור.² נמצא את שיעוריה של נקודה כלשהי שנמצאת בתוך המשולש ABC . לאחר מכן יהיה קל יותר לאתר את הזווית BAC המדוברת.

נסמן ב- D את נקודת החיתוך של חוצה הזווית ABC עם הצלע AC של המשולש המדובר, וב- E את אמצע הקטע BD .

נקודה E נמצאת בתוך המשולש ABC . אם נמצא את השיעורים של נקודות B ו- D , נוכל למצוא את השיעורים של נקודה E לפי הנוסחאות הבאות:

$$x_E = \frac{x_B + x_D}{2} \quad (11)$$

$$y_E = \frac{y_B + y_D}{2} \quad (12)$$

כדי למצוא את השיעורים של נקודה D צריך לפתור את המערכת

² ראו ציור בסוף הפרק.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2} \\ y = -3x + 22 \end{cases} \quad (13)$$

המורכבת ממשוואות הישרים AC ו- BE .

כדי למצוא את השיעורים של נקודה B צריך לפתור את המערכת

$$\begin{cases} y = 2x - 13 \\ y = -3x + 22 \end{cases} \quad (14)$$

המורכבת ממשוואות הישרים AB ו- BE .

לאחר שנפתור את מערכת (13) ואת מערכת (14) נקבל כי

$$D(5\frac{2}{7}, 6\frac{1}{7}), B(7,1) \quad (15)$$

כאשר נציב את שיעורי הנקודות B ו- D בשוויונים (11) ו-(12), נקבל

$$x_E = \frac{5\frac{2}{7} + 7}{2} = 6\frac{1}{7}$$

$$y_E = \frac{6\frac{1}{7} + 1}{2} = 3\frac{4}{7}$$

כעת נשאל את עצמנו: האם נקודה E נמצאת מעל או מתחת לישר AB ?

כדי לענות על שאלה זו נשאל את עצמנו: כיצד מבררים אם נקודה מסוימת נמצאת מעל

או מתחת לישר מסוים?

כדי לברר אם נקודה $P(x_1, y_1)$ נמצאת מעל הישר ℓ , שאינו מאונך לציר ה- x , או

מתחתיו, מתבוננים בנקודת החיתוך של הישר ℓ עם הישר העובר דרך נקודה P ומאונך

לציר ה- x . אם שיעור ה- y של נקודת חיתוך זו הוא y_2 , ומתקיים $y_1 > y_2$, אז נקודה P

נמצאת מעל הישר ℓ ; אם מתקיים $y_1 < y_2$, אז נקודה P נמצאת מתחת לישר ℓ .

אפשר לפתור בעיות מסוג זה בהסתמך על הטענות הבאות:

$$\begin{aligned} &\text{נקודה } P(x_1, y_1) \text{ נמצאת מעל ישר } \ell: ax + by + c = 0 \text{ אף } (b > 0) \\ &\text{ורק אם מתקיים: } ax_1 + by_1 + c > 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} &\text{נקודה } P(x_1, y_1) \text{ נמצאת מתחת לישר } \ell: ax + by + c = 0 \text{ אף } (b > 0) \\ &\text{ורק אם מתקיים: } ax_1 + by_1 + c < 0 \end{aligned} \quad (17)$$

(הוכחנו את הטענות בפרק 7).

כדי לברר אם נקודה $E(6\frac{1}{7}, 3\frac{4}{7})$ נמצאת מעל או מתחת לישר AB , ניעזר במשוואה

כללית (5) של ישר זה. נציב את שיעורי נקודה E בביטוי הרשום באגף השמאלי של משוואה (5), ונקבל:

$$-2 \cdot \left(6\frac{1}{7}\right) + 3\frac{4}{7} + 13 > 0$$

מכאן נובע (לפי טענה (16)) כי

$$\text{הנקודה } E \text{ נמצאת מעל הישר } AB. \quad (18)$$

כעת נשאל את עצמנו: הנקודה E נמצאת מעל או מתחת לישר AC ?

כדי לענות על שאלה זו נציב את שיעורי נקודה E בביטוי הרשום באגף השמאלי של המשוואה הכללית (6) של ישר AC , ונקבל:

$$-6\frac{1}{7} + 2 \cdot \left(3\frac{4}{7}\right) - 7 < 0$$

מכאן נובע (לפי טענה (17)) כי

$$\text{הנקודה } E \text{ נמצאת מתחת לישר } AC. \quad (19)$$

כל משולש הוא מצולע קמור. לכן עבור כל אחת משוקי הזווית BAC במשולש ABC מתקיים התנאי הבא: חוצה הזווית BAC (פרט לנקודה A) ונקודה E נמצאים מהצד האחד של הישר שעליו נמצאת השוק של הזווית BAC . מכאן ומטענות (18) ו-(19) נובע כי

$$\begin{aligned} &\text{חוצה הזווית } BAC \text{ (פרט לנקודה } A) \text{ במשולש } ABC \text{ נמצא מעל הישר} \\ &AB \text{ ומתחת לישר } AC. \end{aligned} \quad (20)$$

כעת נוסיף כמה מילים בנוגע למרחק בין נקודה לישר, אשר יאפשרו לנו להיעזר בטענה (20) להרכבת משוואה של חוצה הזווית BAC במשולש ABC , בהסתמך על המשפט שלפיו: **חוצה הזווית הוא המקום הגיאומטרי של כל נקודות הנמצאות במרחקים שווים משוקי הזווית (ומונחות בתוך הזווית).**

הבה נתבונן שוב בנוסחה (4) לחישוב מרחק בין נקודה $P(x_1, y_1)$ לישר $\ell: ax + by + c = 0$ ובטענות (16) ו-(17). מה אפשר לומר בהסתמך על טענות (16) ו-(17) על הביטוי $|ax_1 + by_1 + c|$ הרשום באגף הימני של נוסחה (4)?

מטענות (16) ו-(17) נובע שאם נקודה $P(x_1, y_1)$ נמצאת מעל ישר $\ell: ax + by + c = 0$ ($b > 0$), אז $|ax_1 + by_1 + c| = ax_1 + by_1 + c$, ואם נקודה $P(x_1, y_1)$ נמצאת מתחת לישר $\ell: ax + by + c = 0$ ($b > 0$), אז $|ax_1 + by_1 + c| = -(ax_1 + by_1 + c)$. (נציין שאם נקודה $P(x_1, y_1)$ נמצאת על הישר $\ell: ax + by + c = 0$, אז $ax_1 + by_1 + c = 0$, ולפיכך במקרה זה מתקיים: $|ax_1 + by_1 + c| = \pm(ax_1 + by_1 + c)$).

לכן

$$\begin{aligned} &\text{אם נקודה } P(x_1, y_1) \text{ נמצאת מעל הישר } \ell: ax + by + c = 0 \text{ (או על ישר} \\ &\text{זה) ומתקיים: } b > 0, \text{ אז עבור המרחק } d(P, \ell) \text{ בין הנקודה } P \text{ לישר } \ell \\ &\text{מתקיים: } d(P, \ell) = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} &\text{אם נקודה } P(x_1, y_1) \text{ נמצאת מתחת לישר } \ell: ax + by + c = 0 \text{ ומתקיים:} \\ &b > 0, \text{ אז עבור המרחק } d(P, \ell) \text{ בין נקודה } P \text{ לישר } \ell \text{ מתקיים:} \\ &d(P, \ell) = -\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned} \quad (22)$$

במילים אחרות, אם $b > 0$, אז

$$\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \begin{cases} d(P, \ell), & \text{אם נקודה } P(x_1, y_1) \text{ נמצאת מעל הישר } \\ & \ell : ax + by + c = 0 \text{ (או על ישר זה)} \\ -d(P, \ell), & \text{אם נקודה } P(x_1, y_1) \text{ נמצאת מתחת} \\ & \text{לישר } \ell : ax + by + c = 0 \end{cases}$$

על סמך טענות (20), (21) ו-(22) מסיקים שעבור נקודה שרירותית $Q(x, y)$ על חוצה הזווית BAC במשולש ABC (ויתרה מזאת, עבור כל נקודה שרירותית $Q(x, y)$ בתוך הזווית BAC) מתקיים:

$$d(Q, \ell_{AB}) = \frac{-2x + y + 13}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{-2x + y + 13}{\sqrt{5}} \quad (23)$$

ו-

$$d(Q, \ell_{AC}) = -\frac{-x + 2y - 7}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = -\frac{-x + 2y - 7}{\sqrt{5}} \quad (24)$$

(בשורה (23) השתמשנו במשוואה (5) של הישר AB , בשורה (24) השתמשנו במשוואה (6) של הישר AC).

כעת ניעזר במשפט שלפיו: **חוצה הזווית הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים משוקי הזווית (ונמצאות בתוך הזווית)**. בהסתמך על משפט זה ועל שורות (23) ו-(24) מסיקים כי חוצה הזווית BAC במשולש ABC נמצא על הישר

$$\frac{-2x + y + 13}{\sqrt{5}} = -\frac{-x + 2y - 7}{\sqrt{5}}$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה הבאה:

$$y = x - 2$$

כעת ברשותנו משוואות של חוצה הזווית ABC וחוצה הזווית BAC במשולש ABC . אם נפתור את המערכת

$$\begin{cases} y = -3x + 22 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

נקבל כי מרכז המעגל החסום במשולש ABC נמצא בנקודה $M(6, 4)$. רדיוס R של מעגל זה שווה למרחק בין נקודה M לישר AB . לכן

$$R = d(M, \ell_{AB}) = \frac{-2 \cdot 6 + 4 + 13}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \text{ יח'}$$

(יכולנו להיעזר בכך ש- $(R = d(M, \ell_{AC}))$).

כעת נוכל להיעזר בנוסחה (1), ולקבל כי משוואת המעגל החסום במשולש ABC היא

$$(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 5$$

מש"ל.

דרך החשיבה ופתרון לסעיף ב'.

מה צריך למצוא בסעיף ב' של הבעיה?

צריך למצוא את משוואת הישר BC .

מה אפשר לומר על הישר BC ?

על הישר BC נמצאת אחת השוקיים של הזווית ABC ; השוק השנייה של זווית זו

נמצאת על הישר

$$\ell_{AB} : y = 2x - 13 ; \quad (25)$$

חוצה הזווית ABC נמצא על הישר

$$\ell_{BE} : y = -3x + 22 \quad (26)$$

ברשותנו גם השיעורים של נקודה B (ראו שורה (15)). אם נצליח למצוא את השיפוע

m_{BC} של הישר, נוכל למצוא את משוואת הישר BC לפי הנוסחה

$$y - y_B = m_{BC}(x - x_B) \quad (27)$$

נרכיב משוואה שהנעלם בה יהיה השיפוע m_{BC} של הישר BC . נסתמך על כך ש-

$$\angle CBE = \angle EBA \quad (28)$$

שתי הזוויות הרשומות בשוויון זה קטנות מ- 90° וגדולות מ- 0° . מכאן ששוויון (28) מתקיים אך ורק אם מתקיים:

$$\tan(\angle CBE) = \tan(\angle EBA) \quad (29)$$

ניזכר כי עבור זווית α בין ישרים $y = m_1x + n_1$ ו- $y = m_2x + n_2$ מתקיימת אחת מהנוסחאות הבאות:

$$\tan \alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \quad (30)$$

או

$$\tan \alpha = -\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \quad (31)$$

כדי להבין איזה משני השוויונים האחרונים מתקיים, מסובבים (בדמיון) את השוק של הזווית המונחת על הישר $y = m_1x + n_1$ סביב נקודת החיתוך של שני הישרים, עד שהיא מתלכדת עם השוק השנייה של הזווית, ועושים זאת כך שברגעי ביניים השוק המסתובבת (פרט לנקודת החיתוך של שני הישרים) תישאר בתוך הזווית המדוברת. אם הסיבוב מתבצע עם כיוון מחוגי השעון, אז עבור הזווית α מתקיים שוויון (30), ואם הסיבוב מתבצע בניגוד לכיוון מחוגי השעון, אז מתקיים שוויון (31).

הסיבוב השוק BE סביב הנקודה B עד שתלכד עם השוק BA של הזווית EBA צריך להתבצע בכיוון ההפוך מזה שיגרום לה להתלכד עם השוק BC של הזווית BC . לכן או שמתקיימים שני השוויונים הבאים:

$$\tan(\angle CBE) = \frac{m_{BE} - m_{BC}}{1 + m_{BE} \cdot m_{BC}}, \quad \tan(\angle EBA) = -\frac{m_{BE} - m_{BA}}{1 + m_{BE} \cdot m_{BA}}$$

או שלחלופין מתקיימים שני שוויונים אלה:

$$\tan(\angle CBE) = -\frac{m_{BE} - m_{BC}}{1 + m_{BE} \cdot m_{BC}}, \quad \tan(\angle EBA) = \frac{m_{BE} - m_{BA}}{1 + m_{BE} \cdot m_{BA}}$$

מכאן ששוויון (29) מתקיים אך רק אם מתקיים:

$$\frac{m_{BE} - m_{BC}}{1 + m_{BE} \cdot m_{BC}} = -\frac{m_{BE} - m_{BA}}{1 + m_{BE} \cdot m_{BA}}$$

נציב בשוויון האחרון לפי השוויונים:

$$m_{BA} = 2 \text{ ו- } m_{BE} = -3$$

(ראו שורות (25) ו-(26)) ונקבל:

$$\frac{-3 - m_{BC}}{1 - 3m_{BC}} = -\frac{-3 - 2}{1 + (-3) \cdot 2}$$

כשפותרים את המשוואה האחרונה מקבלים כי

$$m_{BC} = -\frac{1}{2}$$

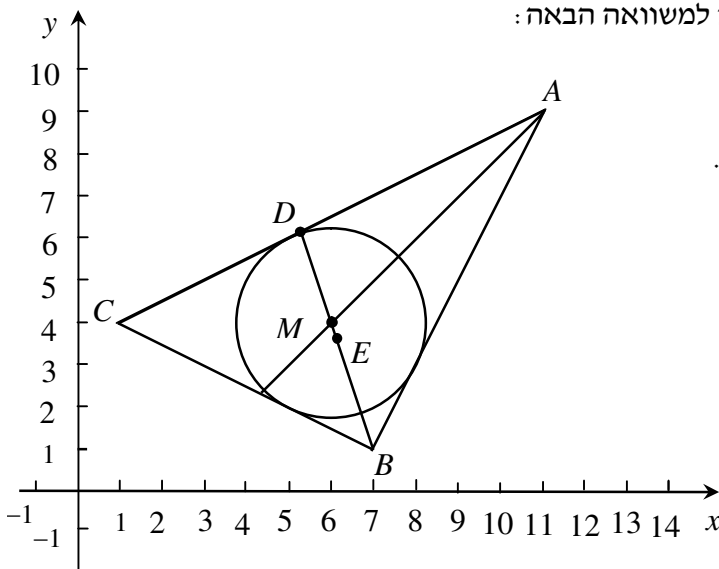
נציב בנוסחה (27) את הערך של m_{BC} שזה עתה מצאנו ואת השיעורים של נקודה B (ראו שורה (15)), ונקבל את המשוואה הבאה של הישר BC :

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 7)$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה הבאה:

$$y = -0.5x + 4.5$$

תשובה: $y = -0.5x + 4.5$.



12. שיטה של l מקומות גיאומטריים

שימוש במשפטים ובנוסחאות מזכיר לי שימוש בצבעים. רוב האנשים משאירים אחריהם רק ציורי ילדים. אך היו אמנים שהשאירו יצירות מופת כה נפלאות שאין לזמן השפעה על קסמן. ישנם גם היום ועוד יהיו בעתיד אמנים כאלה.

יום אחד, כשבניי עדיין למדו בבית ספר יסודי, הם חזרו הביתה בתום הלימודים וסיפרו שהיה להם שיעור בחינוך מיני.

"מה הבנתם מהשיעור?" שאלה אשתי.

"הבנתי שמין זה כיף," ענה אחד מהם.

אל דאגה, למעט הנאמר אולי בכמה הערות, לא הקדמתי לספר כאן ולא אספר בפרקים הבאים דברים שלתלמידי כיתה י"ב, הלומדים מתמטיקה ברמה של 5 יחידות לימוד, מוקדם לדעת.

בהרבה בעיות מתמטיות (ולא רק מתמטיות) מתבקש הפותר את הבעיה למצוא פרט העונה לתיאור מסוים. נסמן את הפרט המבוקש ב- X . הנעלם X לא חייב להיות מספר. הוא יכול להיות פרט גיאומטרי או משוואה. הוא יכול אף להיות מילה שחסרה בתשבץ. כשניגשים לפתור את הבעיה יש להבחין קודם כל באוסף תנאים אשר הנעלם X חייב לקיים. אוסף התנאים חייב להיות כזה שכל פתרון של הבעיה מקיים את כולם, וכל פרט שמקיים את כל התנאים הללו הוא פתרון הבעיה. נניח שפותר הבעיה הגיע למסקנה כי פתרון הבעיה חייב לקיים את התנאים $r_1, r_2, \dots, r_l$, ושכל פרט המקיים את כל אחד מ- l תנאים אלו הוא פתרון הבעיה. אם כך, יכול הפותר להיעזר בשיטת החשיבה אשר נקראת שיטה של l מקומות גיאומטריים.¹

¹ תיאור השיטה אשר ניתן לעיל מבוסס על הספר "Mathematical Discovery" מאת ג' פויה (George Polya); ראוי לציין כי עוד מתמטיקאים של יוון העתיקה השתמשו בשיטה של שני מקומות גיאומטריים לעיתים קרובות.

על המשתמש בשיטה זו להתבונן ב- l הקבוצות הבאות: הקבוצה הראשונה (נקרא לה המקום הגיאומטרי הראשון) היא אוסף של כל האובייקטים המקיימים את התנאי r_1 , הקבוצה השנייה (נקרא לה המקום הגיאומטרי השני) היא אוסף של כל האובייקטים המקיימים את התנאי $r_2, \dots$, הקבוצה ה- l (נקרא לה המקום הגיאומטרי ה- l) היא אוסף של כל האובייקטים המקיימים את התנאי r_l . פתרון הבעיה מקיים את כל אחד מהתנאים $r_1, r_2, \dots, r_l$. לכן הוא שייך לכל אחד מ- l המקומות גיאומטריים הנ"ל. מצד שני, כל אובייקט הנמצא בה בעת בכל אחד ממקומות גיאומטריים אלו, מקיים את התנאים $r_1, r_2, \dots, r_l$, ולכן הוא פתרון הבעיה. על סמך הנאמר אפשר להסיק כי אוסף של כל פתרונות הבעיה הוא החיתוך של l המקומות הגיאומטריים הנ"ל.

בפרקים הקודמים מצאנו לעתים קרובות את השיעורים של נקודות כשיעורים של נקודות החיתוך של שני ישרים. במקרים אלו השתמשנו בשיטה של שני מקומות גיאומטריים. להלן דוגמה מורכבת יותר לשימוש בשיטה זו.

בעיה. נקודה P נמצאת על הישר $\ell: y = -x$. נתון שמנקודה P רואים את הקטע המחבר את נקודות $A(1, -1)$ ו- $B(17, 11)$ בזווית ישרה. מצאו את השיעורים של הנקודה P .

דרך החשיבה ופתרון.

מה צריך למצוא בבעיה?

צריך למצוא את שיעורי הנקודה P .

על אילו דרישות צריכה לענות נקודה זו?

היא צריכה לקיים את התנאים הבאים:

r_1 נקודה P נמצאת על הישר $\ell: y = -x$,

$r_2 \angle APB = 90^\circ$.

הזוג הסדור של השיעורים של כל נקודה המקיימת את שני תנאים אלו הוא פתרון הבעיה.

נשאל את עצמנו: מהו המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המקיימות את התנאי r_1 ?

(1) המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המקיימות את התנאי r_1 הוא הישר

$$\ell: y = -x.$$

כעת נשאל את עצמנו: מהו המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המקיימות את התנאי

r_2 ?

במטרה לענות על שאלה זו נשאל את עצמנו: האם קיים משפט גיאומטרי כלשהו על

נקודות שמהן רואים קטע מסוים בזווית ישרה?

כן, קיים משפט שלפיו: כל זווית היקפית במעגל הנשענת על קוטר היא זווית ישרה.

לכן אם נקודה P מקיימת את שני התנאים הבאים:

1. נקודה P לא מתלכדת עם נקודות A ו- B ,

2. נקודה P נמצאת על המעגל שהקטע AB הוא קוטרו,

אז הנקודה גם מקיימת את התנאי r_2 .

נמצא את משוואת המעגל שהקטע AB הוא קוטרו.

נסמן את מרכז המעגל ב- M . הנקודה M היא אמצע הקטע AB . לכן

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad (2)$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \quad (3)$$

לפי הנתון

$$A(1, -1), \quad (4)$$

$$B(17, 11). \quad (5)$$

נציב בשוויונים (2) ו-(3) לפי שורות (4) ו-(5). נקבל:

$$x_M = \frac{1+17}{2} = 9 \quad (6)$$

$$y_M = \frac{-1+11}{2} = 5 \quad (7)$$

רדיוס R של המעגל המדובר הוא מרחק בין נקודות M ו- A . לכן

$$R = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(9-1)^2 + (5+1)^2} = 10 \text{ יח} \quad (8)$$

נמצא את משוואת המעגל M לפי הנוסחה הבאה:

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = R^2$$

נציב בנוסחה זו לפי שורות (6) ו-(7). נקבל כי משוואת המעגל M היא:

$$(x-9)^2 + (y-5)^2 = 100$$

נשאל את עצמנו:

האם אוסף של כל הנקודות הנמצאות על מעגל M ולא מתלכדות עם נקודות A ו- B הוא המקום הגיאומטרי של נקודות המקיימות את התנאי r_2 ?

הוכחנו לעיל רק את הטענה הבאה:

(10) כל הנקודות הנמצאות על מעגל M ולא מתלכדות עם נקודות A ו- B מקיימות את התנאי r_2 .

כדי שנוכל להשיב על שאלה (9) בחיוב, עלינו עוד להוכיח את הטענה הבאה:

(11) כל הנקודות המקיימות את התנאי r_2 , נמצאות על המעגל M ולא מתלכדות עם נקודות A ו- B .

ההוכחה של טענה (11) תובא בסוף הפרק. לעת עתה תוכלו לסמוך על דבריי או להוכיח אותה בעצמכם. אפשר כמובן גם לדפדף לסוף הפרק במידת הצורך, אך לדעתי עדיף שנתרכז כעת בהבהרת השיטה של שני מקומות גיאומטריים, ולא בהוכחת טענה (11). כאמור, נמשיך בהנחה שהוכחנו את טענה (11). מטענות (10) ו-(11) נובע כי

(12) אוסף של כל הנקודות המונחות על מעגל M ולא מתלכדות עם נקודות A ו- B הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המקיימות את התנאי r_2 .

מטענות (1) ו-(12) נובע כי נקודה P היא הנקודה שאת שיעוריה אנחנו מתבקשים למצוא בבעיה אך ורק אם היא המקיימת את שני התנאים הבאים :

(1) נקודה P נמצאת בה בעת על הישר $\ell: y = -x$ ועל המעגל המיוצג על ידי

$$(x-9)^2 + (y-5)^2 = 100$$

(2) נקודה P לא מתלכדת עם נקודות A ו- B .

לכן קיימות שלוש אפשרויות : (א) לבעיה יש שני פתרונות, (ב) לבעיה יש פתרון אחד, (ג) לבעיה אין אף פתרון.

לבעיה יש שני פתרונות אם יתברר כי הישר ℓ חותך את המעגל M בשתי נקודות השונות מנקודות A ו- B .

לבעיה יש פתרון אחד אם יתברר כי מתקיים אחד המקרים הבאים : (א) הישר ℓ משיק למעגל M בנקודה השונה מנקודה A וגם מנקודה B ; (ב) הישר ℓ חותך את המעגל M בשתי נקודות שאחת מהן מתלכדת עם נקודה A או עם נקודה B , ואילו נקודת החיתוך השנייה שונה מנקודה A וגם מנקודה B .

לבעיה אין אף פתרון אם יתברר כי מתקיים אחד המקרים הבאים : (א) לישר ℓ ולמעגל M אין אף נקודה משותפת ; (ב) הישר ℓ משיק למעגל M בנקודה A או בנקודה B ; (ג) הישר ℓ חותך את המעגל בנקודות A ו- B (במקרה זה הישר ℓ מתלכד עם הישר AB). נציין כי ישר משיק למעגל אך רק אם לישר ולמעגל יש נקודה אחת משותפת.

נמצא את השיעורים של נקודות המונחות בה בעת על הישר $\ell: y = -x$ וגם על המעגל המיוצג על ידי המשוואה $(x-9)^2 + (y-5)^2 = 100$. לשם כך נפתור את מערכת המשוואות הבאה :

$$\begin{cases} y = -x \\ (x-9)^2 + (y-5)^2 = 100 \end{cases}$$

נציב במשוואה השנייה של המערכת האחרונה לפי המשוואה הראשונה שלה, ונקבל את המשוואה הבאה :

$$(x-9)^2 + (-x-5)^2 = 100$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה הבאה:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

למשוואה האחרונה יש שני פתרונות שונים:

$$x_1 = 1, x_2 = 3$$

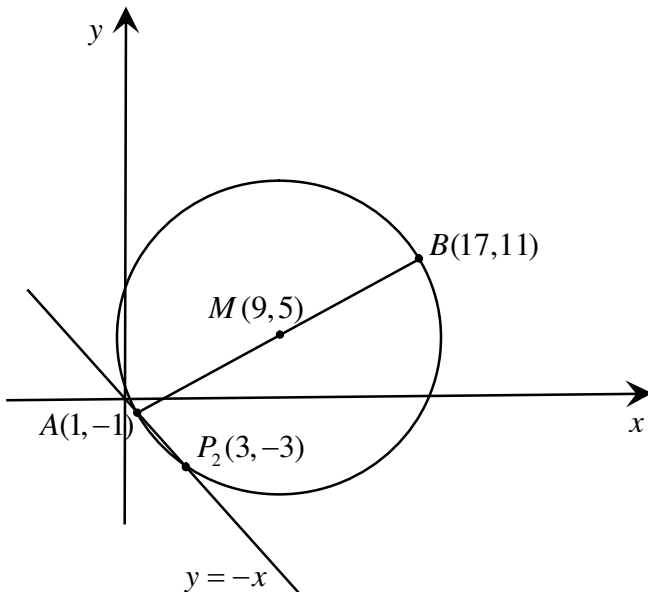
נציב פתרונות אלו במשוואה הראשונה של מערכת המשוואות האחרונה, ונקבל:

$$y_1 = -1, y_2 = -3$$

קיבלנו כי הישר ℓ חותך את המעגל M בנקודות $P_1(1, -1)$ ו- $P_2(3, -3)$.

הנקודה P_1 מתלכדת עם נקודה A , ואילו הנקודה P_2 לא מתלכדת עם אף אחת

מהנקודות A ו- B .



לכן התשובה לבעיה היא: $P(3, -3)$.

דרך שנייה למציאת המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המקיימות את התנאי r_2 .

אם עבור נקודה P כלשהי מתקיים:

$$\angle APB = 90^\circ \quad (13)$$

אז לפי משפט פיתגורס² מתקיים:

$$AB^2 = AP^2 + PB^2 \quad (14)$$

לפי משפט הפוך למשפט פיתגורס³, בכל משולש APB שצלעותיו מקיימות את שוויון (14), מתקיים גם שוויון (13).

מכאן המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המקיימות את התנאי r_2 הוא אוסף של כל הנקודות P המקיימות את שני התנאים הבאים:

(1) נקודה P לא מתלכדת עם נקודות A ו- B ,

(2) נקודה P מקיימת את השוויון (14).

נרכיב את משוואת המקום הגיאומטרי של נקודות P המקיימות את השוויון (14). ניעזר בנוסחה לחישוב מרחק בין שתי נקודות, ונקבל:

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$AP^2 = (x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2$$

$$PB^2 = (x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2$$

מכאן ומשוואות (4) ו-(5) נובע כי

$$AB^2 = (17-1)^2 + (11+1)^2 = 400$$

$$AP^2 = (x_P - 1)^2 + (y_P + 1)^2$$

$$PB^2 = (x_P - 17)^2 + (y_P - 11)^2$$

נציב בשוויון (14) לפי שלושת השוויונים האחרונים, ונקבל:

² אם שוויון (13) מתקיים, אז הנקודה P לא נמצאת על הישר AB . ואכן, אם נקודה P מתלכדת עם אחת מהנקודות A או B , אז הזווית APB לא מוגדרת; אם נקודה P נמצאת בתוך הקטע AB , אז $\angle APB = 180^\circ$; ואם הנקודה P נמצאת על הישר AB , אך מחוץ לקטע AB , אז $\angle APB = 0^\circ$. לכן אם הזווית APB מוגדרת והיא בת 90° , אז אפשר להתבונן במשולש ישר זווית APB ולהיעזר במשפט פיתגורס.

³ משפט הפוך למשפט פיתגורס אפשר להוכיח בעזרת משפט הקוסינוסים.

$$400 = (x_p - 1)^2 + (y_p + 1)^2 + (x_p - 17)^2 + (y_p - 11)^2$$

נחליף בשוויון האחרון את x_p ב- x ואת y_p ב- y . נקבל את המשוואה הבאה של המקום הגיאומטרי של כל הנקודות P המקיימות את שוויון (14):

$$400 = (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (x - 17)^2 + (y - 11)^2$$

לאחר שפותחים סוגריים ומכנסים איברים דומים באגף הימני של משוואה, מקבלים את המשוואה הבאה:

$$400 = 2x^2 - 36x + 2y^2 - 20y + 412$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה הבאה:

$$x^2 - 18x + y^2 - 10y = -6 \quad (15)$$

נציין כי

$$x^2 - 18x + y^2 - 10y = -6$$

$\Leftrightarrow$

$$(x^2 - 2 \cdot x \cdot 9 + 9^2) + (y^2 - 2 \cdot y \cdot 5 + 5^2) = -6 + 9^2 + 5^2$$

$\Leftrightarrow$

$$(x - 9)^2 + (y - 5)^2 = 100 \quad (16)$$

על סמך המשוואה האחרונה מסיקים שהמקום הגיאומטרי של כל הנקודות P המקיימות את השוויון (14) הוא מעגל עם מרכז בנקודה $M(9, 5)$, רדיוס המעגל שווה ל-10 יח'.

אפשר לסיים את הפתרון כמו בשיטה הקודמת, אך נוח יותר לפתור את מערכת המשוואות שבה רשומה משוואה (15) ולא משוואה (16).

דרך שלישית למציאת המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המקיימות את התנאי r_2 .

הזווית APB מוגדרת אך ורק אם נקודה P לא מתלכדת עם אף אחת מהנקודות A ו- B .

אם נקודה P לא מתלכדת עם אף אחת מהנקודות A ו- B , נוכל להתבונן בישרים AP ו- BP (מכיוון שלפי אקסיומת הישר דרך כל שתי נקודות אפשר להעביר ישר אחד ויחיד).

אם אף אחד מהישרים AP ו- BP לא מאונך לציר ה- x , אז השיפוע m_{AP} של הישר

AP והשיפוע m_{BP} של הישר BP מוגדרים. יתרה מזאת, אם אף אחד מהישרים AP ו- BP

לא מאונך לציר ה- x , אז הטענה

$$AP \perp BP \quad (17)$$

מתקיימת אך ורק אם מתקיים:

$$m_{AP} \cdot m_{BP} = -1 \quad (18)$$

בהסתמך על נוסחה לשיפוע של ישר העובר דרך שתי נקודות נקבל כי

$$m_{AP} = \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A}, \quad (19)$$

$$m_{BP} = \frac{y_P - y_B}{x_P - x_B}. \quad (20)$$

לפי הנתון

$$A(1, -1), \quad (21)$$

$$B(17, 11). \quad (22)$$

נציב בשוויון (19) לפי שורה (21), ובשוויון (20) לפי שורה (22). נקבל:

$$m_{AP} = \frac{y_P + 1}{x_P - 1} \quad (23)$$

$$m_{BP} = \frac{y_P - 11}{x_P - 17} \quad (24)$$

נציב בשוויון (18) לפי שני השוויונים האחרונים, ונקבל:

$$\frac{y_p + 1}{x_p - 1} \cdot \frac{y_p - 11}{x_p - 17} = -1 \quad (25)$$

נחליף בשורה (25) את x_p ב- x ואת y_p ב- y , ונקבל את המשוואה הבאה:

$$\frac{y + 1}{x - 1} \cdot \frac{y - 11}{x - 17} = -1 \quad (26)$$

המשוואה מייצגת את אוסף כל הנקודות P המקיימות את התנאים הבאים:

(1) נקודה P לא נמצאת על הישר $\ell_1: x = 1$ וגם לא על הישר $\ell_2: x = 17$,

(2) $\angle APB = 90^\circ$.

נכפיל את המשוואה (26) ב- $(x-1)(x-17)$, ונקבל את המשוואה הבאה:

$$(y+1)(y-11) = -(x-1)(x-17) \quad (27)$$

הוכיחו בעצמכם בתור תרגיל כי המשוואה האחרונה שקולה למשוואה הבאה:

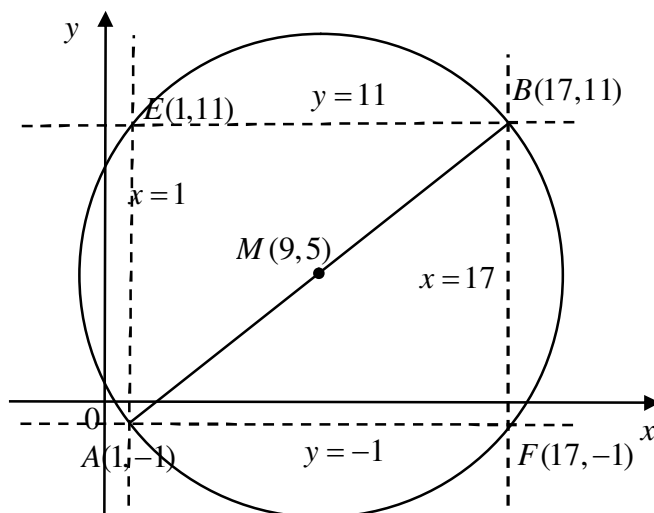
$$(x-9)^2 + (y-5)^2 = 100 \quad (28)$$

נשאל את עצמנו: האם הדרך שבה הגענו אל משוואה (28) מאפשרת לנו לומר כי אוסף כל הנקודות הנמצאות על מעגל המיוצג על ידי משוואה (28) ולא מתלכדות עם נקודות A ו- B הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המקיימות את התנאי r_2 ?

לא, עדיין איננו יכולים להגיע למסקנה זו. הרי הגענו למשוואה (28) מתוך הנחה שאנו מתבוננים בנקודות שאינן נמצאות על הישר $\ell_1: x = 1$ וגם לא על הישר $\ell_2: x = 17$. עלינו עוד להתבונן בנקודות הנמצאות על הישר $\ell_1: x = 1$ וגם בנקודות הנמצאות על הישר $\ell_2: x = 17$.

משוואת הישר המאונך לישר $\ell_1: x = 1$ והעובר דרך הנקודה $B(17, 11)$ היא $y = 11$. נקודת החיתוך של שני הישרים הללו היא הנקודה $(1, 11)$. נסמן את הנקודה האחרונה ב- E . מנקודה E הנמצאת על הישר $\ell_1: x = 1$ רואים את הקטע AB בזווית ישרה. שיעורי נקודה E מקיימים את משוואה (27), השקולה למשוואה (28). לכן נקודה E נמצאת על

מעגל (28). נקודת החיתוך השנייה של הישר $\ell_1: x=1$ עם המעגל המדובר היא הנקודה $A(1, -1)$. חוץ מהנקודות E ו- A אין אף נקודה הנמצאת בה בעת גם על הישר $\ell_1: x=1$ וגם על המעגל הנ"ל.



משוואת ישר המאונך לישר $\ell_2: x=17$ והעובר דרך הנקודה $A(1, -1)$ היא $y = -1$. נקודת החיתוך של שני הישרים הללו היא הנקודה $(17, -1)$. נסמן את הנקודה האחרונה ב- F . מהנקודה F הנמצאת על הישר $\ell_2: x=17$ רואים את הקטע AB בזווית ישרה. שיעורי הנקודה F מקיימים את המשוואה (27), השקולה למשוואה (28). לכן נקודה F נמצאת על מעגל (28). נקודת החיתוך השנייה של הישר $\ell_2: x=17$ עם המעגל המדובר היא הנקודה $B(17, 11)$. חוץ מנקודות F ו- B אין אף נקודה המונחת בה בעת גם על הישר $\ell_2: x=17$ וגם על המעגל הנ"ל.

כעת יש לנו זכות מלאה לומר כי

אוסף של כל הנקודות המונחות על מעגל המיוצג על ידי משוואה (28) ולא מתלכדות עם נקודות A ו- B הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המקיימות את התנאי r_2 . (29)

הערה 1. בדרך כלל, כשמוכיחים טענות מהסוג של טענה (29) בשיטה השלישית לא כותבים הוכחה כה מפורטת: לא מבחינים בישרים המאונכים לציר ה- x ועוברים דרך קצוות הקטע AB . הרי אין במבחן די זמן להסברים מפורטים כל כך. ובכל זאת, קיים הבדל עצום בין החסרת קטעים מהפתרון למען חיסכון בזמן, ואף ברור אילו קטעים הוחסרו, לבין כתיבת אותם שלבים במחשבה שהפתרון מושלם. נציין שאילו לא היינו קפדניים ולא היינו מבחינים בכך שאם נקודה P מתלכדת עם הנקודה A או עם הנקודה B , אז הזווית APB לא מוגדרת, היינו מגיעים בטעות למסקנה כי לבעיה יש שני פתרונות שונים ולא פתרון אחד.

הוכחת טענה (11).

הבה נזכר כיצד הגענו לראשונה למסקנה כי

אוסף של כל הנקודות הנמצאות על מעגל M ולא מתלכדות עם נקודות A

ו- B הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המקיימות את התנאי r_2 .

בהסתמך על אחד מהמשפטים הגיאומטריים קיבלנו כי

כל הנקודות הנמצאות על מעגל M ולא מתלכדות עם נקודות A ו- B ,

מקיימות את התנאי r_2 .

היינו חייבים להוכיח גם את הטענה הבאה (טענה (11)):

כל הנקודות המקיימות את התנאי r_2 , נמצאות על המעגל M ולא

מתלכדות עם נקודות A ו- B .

הבטחתי שנוכיח את טענה (11) בסוף הפרק, וזה הזמן לקיים את ההבטחה.

נוכיח בדרך השלילה כי

(30) כל הנקודות המקיימות את התנאי r_2 , נמצאות על המעגל M .

נניח שקיימת נקודה P אשר לא נמצאת על מעגל M ואשר מקיימת את השוויון הבא:

$$\angle APB = 90^\circ \quad (31)$$

על סמך טענה (31) אפשר להסיק כי

(32) הנקודה P לא נמצאת על הישר AB .

לפי אקסיומת הישר, דרך נקודות A ו- P אפשר להעביר ישר אחד ויחיד. יתרה מזאת, בהסתמך על טענה (32) אפשר להסיק כי קיימות אך ורק שתי אפשרויות:

1. הישר AP משיק למעגל M בנקודה A ;

2. הישר AP חותך את המעגל M בשתי נקודות: בנקודה A ובנקודה שונה מנקודות A ו- B .

הנחנו כי

(33) קיימת נקודה P אשר לא נמצאת על מעגל M ואשר מקיימת את שוויון (31),

לאחר מכן הגענו למסקנה שאם טענה זו מתקיימת, אז מתקיימת אך ורק אחת משתי הטענות הבאות:

(34) הישר AP משיק למעגל M בנקודה A ;

(35) הישר AP חותך את המעגל M בשתי נקודות: בנקודה A ובנקודה שונה מנקודה זו.

נניח כי נוסף לטענה (33) מתקיימת גם טענה (34). מטענה (34) נובע כי

$$\angle PAB = 90^\circ \quad (36)$$

(לפי המשפט: הזווית בין משיק לרדיוס הנפגשים בנקודת ההשקה שווה ל- 90°).
כעת ניעזר במשפט שלפיו: מכל נקודה שנמצאת מחוץ לישר נתון אפשר להוריד לישר אנך אחד ויחיד.⁴

לפי משפט זה שוויונים (31) ו-(36) לא יכולים להתקיים בו-זמנית. הגענו לידי סתירה. לכן טענה (34) לא מתקיימת. מכאן אם טענה (33) מתקיימת, אז טענה (34) לא מתקיימת. לכן על סמך ההנחה שטענה (33) מתקיימת עלינו להסיק כי טענה (35) מתקיימת.

נסמן ב- C את נקודת החיתוך השונה מנקודה A של הישר AP עם המעגל M . על סמך טענה (32) מסיקים כי

(37) נקודה C לא מתלכדת עם נקודה B .

⁴ ישנו גם המשפט הבא: במישור, אפשר להעביר דרך כל נקודה שנמצאת על ישר נתון אנך אחד ויחיד לישר זה.

הזווית ACB היא זווית היקפית במעגל M הנשענת על קוטר AB . קיים משפט שלפיו: **כל זווית היקפית במעגל הנשענת על קוטר היא זווית ישרה**. לפי משפט זה מתקיים:

$$\angle ACB = 90^\circ \quad (38)$$

שוב ניעזר במשפט שלפיו מנקודה הנמצאת מחוץ לישר אפשר להוריד לישר אנך אחד ויחיד. לפי משפט זה טענות (31) ו-(38) לא יכולות להתקיים בו-זמנית. הגענו לידי סתירה על סמך ההנחה כי טענה (33) (טענה הפוכה לטענה (30)) מתקיימת. לכן טענה (30) אכן מתקיימת.

כפי שאמרנו לעיל, נקודה P המקיימת את התנאי r_2 לא מתלכדת עם נקודות A ו- B , כי אחרת הזווית APB לא מוגדרת. מכאן ומטענה (30) נובע כי טענה (11) מתקיימת.

הערה 2. נציין שלאחר שמצאנו את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המקיימות את התנאי r_2 בדרך השנייה, גם לאחר שעשינו זאת בדרך השלישית, קיבלנו בה בעת כי טענות (10) ו-(11) מתקיימות.

13. שתי נקודות מבט

שאל אותי תלמיד: "איך זה ייתכן שלבעיה אין אף פתרון?"
עניתי: "בעוד מספר שנים תגיע לגיל שבו תרצה להקים משפחה משלך. אם למטרה זו תחפש אישה מושלמת – לבעיה זו, לא קיים אף פתרון."

באמצע המאה ה-19 הומצא הצילום הסטריאוסקופי - צילום משתי זוויות ליצירת תמונה תלת-ממדית. גם כשפותרים בעיה בשתי שיטות שונות מקבלים תמונה רב-ממדית שלה.

בעיה. שניים מקודקודי המשולש ABC הם $A(-1, 2)$ ו- $B(3, 5)$. הקודקוד השלישי של המשולש נמצא על הישר $\ell: y = \frac{1}{2}x$. שטח המשולש הוא 10 יח"ר. מצאו את הקודקוד השלישי של המשולש.

דרך החשיבה ופתרון א' (שיטה אלגברית).

מה צריך למצוא?

צריך למצוא את השיעורים של קודקוד C במשולש ABC .

נסמן את שיעור ה- x של נקודה C ב- x_1 , ואת שיעור ה- y שלה נסמן ב- y_1 .

עלינו לפתור בעיה עם שני נעלמים: x_1 ו- y_1 . ננסה להרכיב שתי משוואות עם שני נעלמים

אלו.

מה נתון?

בין היתר נתון שנקודה C נמצאת על הישר $\ell: y = \frac{1}{2}x$.

נקודה $C(x_1, y_1)$ נמצאת על ישר ℓ אך ורק אם שיעוריה מקיימים את משוואת הישר,

כלומר אך ורק אם מתקיים:

$$y_1 = \frac{1}{2}x_1 \quad (1)$$

קעת ברשותנו משוואה אחת עם הנעלמים x_1 ו- y_1 . ננסה להרכיב עוד משוואה עם נעלמים אלו.

נשאל את עצמנו: במה מהנתון בבעיה עוד לא השתמשנו? לא השתמשנו בכך שלפי הנתון קודקוד A של המשולש המדובר נמצא בנקודה $(-1, 2)$, וקודקוד B נמצא בנקודה $(3, 5)$. גם לא השתמשנו בכך שלפי הנתון עבור השטח $S_{\Delta ABC}$ של המשולש ABC מתקיים:

$$S_{\Delta ABC} = 10 \text{ יח"ר} \quad (2)$$

כיצד נוכל להיעזר בשטח המשולש ובשיעורי הנקודות A ו- B ? כדי לענות על שאלה זו נשאל את עצמנו: מהי הנוסחה לחישוב שטח של משולש? **שטח משולש שווה למחצית מכפלת צלע בגובה לאותה צלע.**

את אורכה של איזו צלע במשולש ABC אפשר לחשב? אפשר לחשב את אורך הצלע AB לפי הנוסחה

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \quad (3)$$

נציב בנוסחה את השיעורים של הנקודות A ו- B . נקבל:

$$AB = \sqrt{(-1-3)^2 + (2-5)^2} = 5 \text{ יח'} \quad (4)$$

נסמן ב- h_{AB} את הגובה לצלע AB במשולש ABC . ננסה להיעזר בנוסחה

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h_{AB} \quad (5)$$

נציב בשוויון (5) לפי שורות (2) ו- (4), ונקבל:

$$10 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot h_{AB}$$

קיבלנו משוואה עם הנעלם h_{AB} . לאחר שנפתור אותה, נקבל:

$$h_{AB} = 4 \text{ יח'} \quad (6)$$

על סמך השוויון האחרון אפשר להסיק כי

$$(7) \quad \text{נקודה } C \text{ נמצאת במרחק } 4 \text{ יח' מהישר } AB$$

בטענה (7) מדובר במרחק בין נקודה לישר, לכן נשאל את עצמנו: מהי הנוסחה לחישוב מרחק בין נקודה לישר?

את המרחק d בין נקודה (x_0, y_0) לישר, המיוצג על ידי המשוואה הכללית $ax + by + c = 0$, אפשר לחשב לפי הנוסחה הבאה:

$$(8) \quad d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

כדי שנוכל להיעזר בנוסחה זו לחישוב המרחק בין נקודה C לישר AB עלינו לקבל משוואה כללית של הישר AB . מצאו בעצמכם את המשוואה הכללית של הישר AB . עליכם לקבל את המשוואה הבאה:

$$(9) \quad -3x + 4y - 11 = 0$$

או משוואה השקולה לה.¹

על סמך נוסחה (8) ומשוואה (9) מקבלים כי עבור המרחק $d(C, \ell_{AB})$ בין נקודה $C(x_1, y_1)$ לישר AB מתקיים:

$$(10) \quad d(C, \ell_{AB}) = \frac{|-3x_1 + 4y_1 - 11|}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = \frac{|-3x_1 + 4y_1 - 11|}{5}$$

על סמך שורות (7) ו-(10) מסיקים כי שיעורי הנקודה $C(x_1, y_1)$ חייבים לקיים את המשוואה הבאה

$$(11) \quad \frac{|-3x_1 + 4y_1 - 11|}{5} = 4$$

¹ המשוואה המפורשת של ישר זה היא: $y = \frac{3}{4}x + 2\frac{3}{4}$.

קיבלנו כי שיעורי הנקודה $C(x_1, y_1)$ מקיימים את תנאים (1) ו-(11). יתרה מזאת, על סמך הנאמר לעיל אפשר להסיק כי כל זוג סדור (x_1, y_1) אשר מקיים את תנאים אלו הוא פתרון הבעיה. מכאן הזוג הסדור של שיעורי נקודה C הוא פתרון המערכת הבאה:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ \frac{|-3x + 4y - 11|}{5} = 4 \end{cases}$$

וכל פתרון של מערכת משוואות זו הוא פתרון הבעיה. אוסף הנקודות במישור המקיימות את המשוואה השנייה של מערכת זו הוא איחוד של אוסף הנקודות המקיימות את המשוואה

$$\frac{-3x + 4y - 11}{5} = 4$$

ואוסף של נקודות המקיימות את המשוואה

$$\frac{-3x + 4y - 11}{5} = -4$$

במילים אחרות

$$\frac{|-3x + 4y - 11|}{5} = 4$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{-3x + 4y - 11}{5} = -4 \quad \text{או} \quad \frac{-3x + 4y - 11}{5} = 4$$

מכאן

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ \frac{|-3x + 4y - 11|}{5} = 4 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$



$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x \\ \frac{-3x + 4y - 11}{5} = -4 \end{array} \right. \quad \text{או} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x \\ \frac{-3x + 4y - 11}{5} = 4 \end{array} \right.$$

פתרון של המערכת

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x \\ \frac{-3x + 4y - 11}{5} = 4 \end{array} \right.$$

הוא $(-31, -15.5)$, ואילו פתרון של המערכת

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x \\ \frac{-3x + 4y - 11}{5} = -4 \end{array} \right.$$

הוא $(9, 4.5)$. לכן התשובה לבעיה היא $C(-31, -15.5)$ או $C(9, 4.5)$.

דרך החשיבה ופתרון ב' (שיטה של שני מקומות גיאומטריים).

מה צריך למצוא?

צריך למצוא את השיעורים של קודקוד C במשולש ABC .

כיצד מחפשים שיעורים של נקודה מסוימת?

אחת הדרכים למציאת שיעורים של נקודה מסוימת היא למצוא את המשוואות של שני קווים כלשהם אשר עוברים דרך נקודה זו, ולאחר מכן למצוא את השיעורים של נקודות משותפות לשני הקווים. שיטה זו היא מקרה פרטי של שיטת l מקומות גיאומטריים המתוארת בפרק הקודם. לעתים קרובות כדי למצוא את השיעורים של נקודה מסוימת מספיק להבחין בשני תנאים אשר הנקודה חייבת לקיים, למצוא עבור כל אחד מהתנאים

את משוואת המקום גיאומטרי של כל הנקודות המקיימות אותו, ולפתור את המערכת המורכבת ממשוואות אלו.²

נסה למצוא משוואות של שני מקומות גיאומטריים הכוללים את נקודה C . עלינו להבחין בשני תנאים (נקרא להם תנאים r_1 ו- r_2) אשר נקודה C חייבת לקיים. על סמך הנתון בבעיה מסיקים כי נקודה C חייבת לקיים את תנאי הבא:

$$(r_1) \quad \text{נקודה } C \text{ נמצאת על הישר } \ell: y = \frac{1}{2}x$$

המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המקיימות את תנאי זה הוא הישר $\ell: y = \frac{1}{2}x$. בדיוק כמו בפתרון הבעיה בשיטה הקודמת, מסיקים כי נקודה C חייבת גם לקיים את התנאי הבא:

$$(r_2) \quad \text{נקודה } C \text{ נמצאת במרחק } 4 \text{ יח' מהישר } AB.$$

נציין שכל נקודה אשר מקיימת את התנאים r_1 ו- r_2 יכולה לשמש קודקוד C של המשולש ABC הנתון בבעיה.

מהו המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המקיימות את התנאי r_2 ? כדי לענות על שאלה זו נשאל את עצמנו: מהי הנוסחה לחישוב מרחק בין נקודה לישר? את המרחק d בין נקודה (x_0, y_0) לישר, המיוצג על ידי המשוואה הכללית $ax + by + c = 0$, אפשר לחשב לפי הנוסחה הבאה:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (12)$$

שוב אבקש שתקבלו בעצמכם את המשוואה הכללית של הישר AB . כפי שנאמר לעיל, עליכם לקבל את המשוואה הבאה:

$$-3x + 4y - 11 = 0$$

או משוואה השקולה לה.

² קיימות גם בעיות שבהן הנקודה חייבת לקיים יותר משני תנאים. לעתים קרובות אפשר לפתור בעיות מסוג זה בדרך הבאה: ראשית מרכיבים מערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים בעזרת שיטה של שני מקומות גיאומטריים, פותרים אותה ובודקים אילו מהפתרונות של המערכת מקיימים את שאר התנאים.

בהסתמך על נוסחה (12) ועל המשוואה הכללית של הישר AB מסיקים כי משוואה של המקום הגיאומטרי השני (כלומר, של המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המקיימות את התנאי r_2) היא

$$\frac{|-3x+4y-11|}{5} = 4$$

מכאן המקום הגיאומטרי השני הוא איחוד של ישרים

$$\ell_1: \frac{-3x+4y-11}{5} = -4 \quad \vee \quad \ell_2: \frac{-3x+4y-11}{5} = 4$$

שני ישרים אלו מקבילים לישר AB ונמצאים במרחק של 4 יח' ממנו.

נשים לב כי מתקיימות שתי הטענות הבאות:

- קודקוד C של המשולש הנתון מקיים את תנאים r_1 ו- r_2 ;
- הזוג הסדור של השיעורים של כל נקודה המקיימת את התנאים r_1 ו- r_2 הוא פתרון של בעיה זו.

לכן

- קודקוד C של המשולש הנתון שייך לשני המקומות הגיאומטריים הנ"ל;
- כל נקודה אשר שייכת בה בעת לשני המקומות הגיאומטריים הנ"ל יכולה לשמש קודקוד C של המשולש הנתון.

השיפוע של הישר $\ell: y = \frac{1}{2}x$ לא שווה לשיפוע של הישר AB . לכן הישר ℓ חותך את

הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 המקבילים לישר AB . מכאן לבעיה יש שני פתרונות.

כדי למצוא אחד מפתרונות אלו צריך לפתור את המערכת

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ \frac{-3x+4y-11}{5} = 4 \end{cases}$$

כדי למצוא את הפתרון השני צריך לפתור את המערכת

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ \frac{-3x + 4y - 11}{5} = -4 \end{cases}$$

לאחר שפותרים את מערכות משוואות אלו מקבלים כי $C(-31, -15.5)$ או $C(9, 4.5)$.

הערה 1. אילו השיפוע של הישר ℓ היה שווה לשיפוע של הישר AB , היינו יכולים לקבל את תשובות הבאות: (א) אם אף אחד מהישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 לא מתלכד עם הישר ℓ , היינו מסיקים כי לבעיה אין אף פתרון; אם אחד מהישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 מתלכד עם הישר ℓ , היינו מסיקים כי כל נקודה על ישר זה יכולה להיות קודקוד C של המשולש הנתון (במקרה זה לבעיה יש אינסוף פתרונות).

הערה 2. גם למי שיעדיף להשתמש בשיטה האלגברית לפתרון בעיה דומה לזו במבחן אמליץ לפתור אותה בראש בשיטה של שני מקומות גיאומטריים.

הערה 3. כשהתחלנו לחפש את השיעורים של נקודה C בדרך השנייה (בשיטה של שני מקומות גיאומטריים) שאלנו את עצמנו: כיצד מחפשים את השיעורים של נקודה מסוימת? התשובה שניתנה לאחר מכן הייתה חלקית. אילו עוד דרכים קיימות למציאת השיעורים של נקודה מסוימת במישור נוסף על אלו שתוארו מיד לאחר השאלה? בעיות מסוג זה פותרים גם בדרכים הבאות:

- מרכיבים מערכת של שתי משוואות שהנעלמים בהן הם שיעורי הנקודה או מערכת של $2 + m$ משוואות עם $2 + m$ נעלמים (כאן m הוא מספר טבעי). ושניים מהנעלמים הם שיעורי הנקודה. הדרך הראשונה שבה פתרנו את הבעיה האחרונה הייתה לפי גישה זו. חשוב לציין כי מי שמנסה למצוא את שיעורי הנקודה כנקודה משותפת לשני מקומות גיאומטריים מנסה גם הוא להגיע למערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים, אך דרך חשיבתו שונה מזו של מי שמנסה להרכיב מערכת משוואות אך לא חושב על הנקודה כנקודת החיתוך של שני קווים.
- נעזרים בנוסחאות המקשרות בין שיעורי קצות הקטע לבין שיעורי הנקודה המחלקת את הקטע ביחס נתון. בבעיות רבות הנקודה האחרונה היא אמצע הקטע. (לאמיתו של דבר שיטה זו היא מקרה פרטי של השיטה הקודמת. חשוב לציין כי לעתים קרובות כאשר מנסים לפתור בעיה כלשהי בשיטה הקודמת נעזרים בנוסחאות אלו.)

14. צועדים במעגלים

כשאתה זורק אבנים למים, הסתכל על המעגלים שהם יוצרים, אחרת אתה זורק את האבנים לשווא.

(קוזמא פרוטקוב)

בעיה. נתון מעגל העובר דרך נקודות $A(-2,3)$ ו- $B(6,5)$. מרכז המעגל נמצא על הישר $\ell: y = 4x + 4$. מצאו את משוואת המעגל.

דרך החשיבה ופתרון.

מה צריך למצוא בבעיה?

צריך למצוא משוואת מעגל המקיים כמה תנאים.

מהם התנאים אשר מקיים המעגל המדובר?

לפני שנענה על השאלה האחרונה נסמן את מרכז המעגל ב- M . כעת נוכל לקרוא למעגל

המדובר מעגל M .

לפי הנתון

$$(1) \quad \text{המעגל } M \text{ עובר דרך נקודה } A(-2,3),$$

$$(2) \quad \text{המעגל } M \text{ עובר דרך נקודה } B(6,5),$$

$$(3) \quad \text{מרכז } M \text{ של המעגל המדובר נמצא על הישר } \ell: y = 4x + 4.$$

אפשר לשאול: מהו מעגל שמרכזו בנקודה M ?

מעגל שרדיוסו R ומרכזו בנקודה M הוא מקום גיאומטרי של כל הנקודות במישור הנמצאות במרחק R מהנקודה M (מידע עשוי לסייע למי שלא זוכר את הנוסחה הבאה, הנוסחה למשוואת מעגל, בתנאי שיזכור את הנוסחה למרחק בין שתי נקודות במישור).

נשאל את עצמנו: מהי הנוסחה למשוואת המעגל?

משוואת המעגל שרדיוסו R ומרכזו בנקודה $M(a,b)$ היא

$$(4) \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

המשך פתרון א' (שיטה אלגברית).

מה עלינו למצוא כדי לקבל את המשוואה הנדרשת בעזרת נוסחה (4)?

עלינו למצוא את הגודל של כל אחד מהפרמטרים a , b ו- R בנוסחה. זו בעיה עם שלושה נעלמים. הנעלמים אשר עלינו למצוא הם a , b ו- R . ננסה להרכיב שלוש משוואות עם שלושת הנעלמים האלו.

שוב נשאל את עצמנו: מהם התנאים אשר מקיים המעגל המדובר?

המעגל מקיים את התנאים (1), (2) ו-(3). ננסה להרכיב שלוש משוואות בהסתמך על שלושה תנאים אלו.

נקודה נמצאת על קו מסוים אך ורק אם היא מקיימת את המשוואה המייצגת את הקו. לכן

1) תנאי (1) מתקיים אם רק שיעורי הנקודה $A(-2, 3)$ מקיימים את משוואה (4), כלומר
אך ורק אם מתקיים:

$$(-2-a)^2 + (3-b)^2 = R^2$$

2) תנאי (2) מתקיים אם רק שיעורי הנקודה $B(6, 5)$ מקיימים את משוואה (4), כלומר
אך ורק אם מתקיים:

$$(6-a)^2 + (5-b)^2 = R^2$$

3) תנאי (3) מתקיים אם רק שיעורי הנקודה $M(a, b)$ מקיימים את המשוואה
 $y = 4x + 4$, כלומר אך ורק אם מתקיים:

$$b = 4a + 4$$

מכאן המשוואה אשר אנחנו מתבקשים למצוא בבעיה היא משוואת המעגל שהשיעורים של מרכזו $M(a, b)$ ושל רדיוסו R מקיימים את שלושת השוויונים הבאים:

$$(-2-a)^2 + (3-b)^2 = R^2,$$

$$(6-a)^2 + (5-b)^2 = R^2,$$

$$b = 4a + 4.$$

כדי למצוא את ערכי הפרמטרים a , b ו- R המקיימים את שלושת השוויונים הללו עלינו להתייחס אל פרמטרים a , b ו- R כאל נעלמים, להתייחס אל שלושת השוויונים האחרונים כאל משוואות, ולפתור את המערכת הבאה המורכבת ממשוואות אלו:

$$\begin{cases} (-2-a)^2 + (3-b)^2 = R^2 \\ (6-a)^2 + (5-b)^2 = R^2 \\ b = 4a + 4 \end{cases} \quad (5)$$

מערכת המשוואות הזו שקולה למערכת המשוואות הבאה

$$\begin{cases} (2+a)^2 + (3-b)^2 = R^2 \\ (6-a)^2 + (5-b)^2 - (2+a)^2 - (3-b)^2 = 0 \\ b = 4a + 4 \end{cases}$$

(נעזרנו בשוויון $(-2-a)^2 = (2+a)^2$ וחיסרנו מהמשוואה השנייה של מערכת (5) את המשוואה הראשונה).

לאחר שבמשוואה השנייה של מערכת המשוואות האחרונה נפתח סוגריים ונכנס איברים דומים, נקבל את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} (2+a)^2 + (3-b)^2 = R^2 \\ -16a - 4b + 48 = 0 \\ b = 4a + 4 \end{cases}$$

מערכת משוואות זו שקולה למערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} (2+a)^2 + (3-b)^2 = R^2 \\ b = -4a + 12 \\ b = 4a + 4 \end{cases}$$

מערכת המשוואות האחרונה שקולה למערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} (2+a)^2 + (3-b)^2 = R^2 \\ b = -4a + 12 \\ -4a + 12 = 4a + 4 \end{cases} \quad (6)$$

נפתור את המשוואה השלישית במערכת המשוואות הזו. נקבל:

$$a = 1 \quad (7)$$

נציב במשוואה השנייה של מערכת משוואות (6) לפי שורה (7), ונקבל:

$$b = 8 \quad (8)$$

נציב במשוואה הראשונה של מערכת המשוואות (6) לפי שורות (7) ו-(8), ונקבל:

$$(2+1)^2 + (3-8)^2 = R^2$$

מכאן

$$R^2 = 34 \quad (9)$$

לכן

$$R = \sqrt{34} \text{ יח'}$$

למעשה אין לנו צורך בשוויון האחרון. ניעזר רק בשוויונים (7), (8) ו-(9). נציב בנוסחה (4) לפי שלושה שוויונים אלו, ונקבל את המשוואה הבאה:

$$(x-1)^2 + (y-8)^2 = 34$$

מש"ל.

המשך פתרון ב' (מבוסס על שימוש בשיטה של שני מקומות גיאומטריים).

מה עלינו למצוא כדי שנוכל לקבל את המשוואה הנדרשת בעזרת נוסחה (4)? עלינו למצוא את השיעורים של מרכז המעגל ואת רדיוס המעגל. ראשית ננסה לפתור את הבעיה הבאה:

נתון מעגל העובר דרך נקודות $A(-2,3)$ ו- $B(6,5)$. מרכז המעגל נמצא על הישר

$$\ell: y = 4x + 4. \text{ מצאו את השיעורים של מרכז המעגל.}$$

זו תת-בעיה של הבעיה אשר התבקשנו לפתור בפרק זה.
מרכז המעגל המדובר הוא נקודה. לכן נשאל את עצמנו: כיצד מחפשים את השיעורים של נקודה מסוימת?

אחת הדרכים למציאת השיעורים של נקודה מסוימת היא למצוא את המשוואות של שני קווים כלשהם אשר עוברים דרך נקודה זו, ולאחר מכן למצוא את השיעורים של נקודות משותפות לשני הקווים.

ננסה למצוא משוואות של שני מקומות גיאומטריים הכוללים את הנקודה M (נזכיר כי ב- M אנחנו מסמנים את מרכז המעגל המדובר). עלינו להבחין בשני תנאים (נקרא להם תנאים r_1 ו- r_2) אשר הנקודה M חייבת לקיים.

התנאים r_1 ו- r_2 צריכים לענות על הדרישה הבאה: המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המקיימות את התנאי r_1 (נקרא לו המקום הגיאומטרי הראשון) וגם המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המקיימות את התנאי r_2 (נקרא לו המקום הגיאומטרי השני) - שניהם צריכים להיות קווים.

אם נצליח להבחין בשני תנאים כאלו ולמצוא את המשוואות של שני המקומות הגיאומטריים, נוכל להרכיב מערכת מהמשוואה של המקום הגיאומטרי הראשון ומהמשוואה של המקום הגיאומטרי השני. הזוג הסדור של שיעורי הנקודה M הוא פתרון של מערכת משוואות זו.

אם יתברר שנוסף על תנאים r_1 ו- r_2 יהיו תנאים נוספים שנקודה M חייבת לקיים, נבדוק עבור כל פתרון של מערכת המשוואות הנ"ל אם הוא מקיים גם את אותם תנאים נוספים. כל פתרון של מערכת משוואות זו אשר מקיים את כל התנאים אשר שיעורי הנקודה M חייבים לקיים הוא פתרון לבעיה זו.

זוהי תוכנית כללית לפתרון תת-הבעיה הנ"ל. נתחיל בביצועה.

ננסח את תנאי r_1 כך: נקודה M מונחת על הישר $\ell: y = 4x + 4$.

ננסח את תנאי r_2 כך: נקודה M היא מרכז המעגל העובר דרך נקודות $A(-2, 3)$ ו- $B(6, 5)$.

נשים לב כי מתקיימות שתי הטענות הבאות:

■ מרכז המעגל הנזכר בתת-הבעיה הנוכחית מקיים את תנאים r_1 ו- r_2 ;

▪ זוג השיעורים של כל נקודה M המקיימת את התנאים r_1 ו- r_2 הוא פתרון של תת-בעיה זו.

לכן אוסף של כל הפתרונות של תת-הבעיה הנוכחית הוא אוסף של כל הפתרונות של מערכת המשוואות אשר אנחנו מנסים להרכיב.

נשאל את עצמנו: מהו המקום הגיאומטרי של כל הנקודות M המקיימות את התנאי r_1 (המקום הגיאומטרי הראשון)?

המקום הגיאומטרי הראשון הוא הישר ℓ . משוואתו היא $y = 4x + 4$.

נשאל את עצמנו: מהו המקום הגיאומטרי של כל הנקודות M המקיימות את התנאי r_2 (המקום הגיאומטרי השני)? במילים אחרות: מהו המקום הגיאומטרי של מרכזי המעגלים העוברים דרך הנקודות $A(-2, 3)$ ו- $B(6, 5)$?

אם נקודה M היא מרכז המעגל העובר דרך הנקודות $A(-2, 3)$ ו- $B(6, 5)$, אז היא נמצאת במרחקים שווים מנקודות אלו. גם ההפך הוא נכון: כל נקודה M הנמצאת במרחקים שווים מהנקודות A ו- B היא מרכז המעגל העובר דרך נקודות אלו. הרדיוס של המעגל האחרון שווה למרחק בין נקודות M ו- A .

מכאן

המקום הגיאומטרי השני הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים מקצות הקטע AB .

קיים משפט גיאומטרי שלפיו: האנך האמצעי לקטע הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור הנמצאות במרחקים שווים מקצות הקטע. לכן

המקום הגיאומטרי השני הוא האנך האמצעי לקטע AB .

מתברר שגם המקום הגיאומטרי השני הוא ישר. נסמן ישר זה ב- ℓ' , וננסה למצוא את משוואתו.

נשאל את עצמנו: כיצד מוצאים את המשוואה של ישר מסוים?

בעיות מסוג זה פותרים לעתים קרובות בדרך הבאה: מוצאים את השיפוע m של הישר ואת השיעורים x_1 ו- y_1 של אחת הנקודות הנמצאות עליו; לאחר מכן מציבים את

המספרים שנמצאו בנוסחה הבאה למשוואה של ישר עם שיפועו m ואשר עובר דרך הנקודה (x_1, y_1) :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

במטרה למצוא את השיפוע של הישר ℓ' ואת השיעורים של אחת הנקודות הנמצאות עליו נשאל את עצמנו : מהו האנך האמצעי לקטע AB ?
 האנך האמצעי לקטע AB הוא הישר המאונך לישר AB והעובר דרך אמצע הקטע AB .
 נסמן את אמצע הקטע AB ב- N . נמצא את השיעורים של הנקודה N לפי הנוסחאות הבאות :

$$x_N = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad (10)$$

$$y_N = \frac{y_A + y_B}{2} \quad (11)$$

לפי הנתון

$$A(-2, 3), \quad (12)$$

$$B(6, 5) \quad (13)$$

נציב בנוסחאות (10) ו-(11) לפי שורות (12) ו-(13), ונקבל :

$$x_N = \frac{-2 + 6}{2} = 2$$

$$y_N = \frac{3 + 5}{2} = 4$$

קיבלנו כי

$$N(2, 4). \quad (14)$$

ברשותנו השיעורים של אחת הנקודות הנמצאות על הישר ℓ' . ננסה למצוא את השיפוע m' של הישר, בהסתמך על כך ש-

$$\ell' \perp \ell_{AB} \quad (15)$$

מטענה (15) נובע כי

$$m' = -\frac{1}{m_{AB}} \quad (16)$$

אם נצליח לחשב את השיפוע m_{AB} של הישר AB , נוכל לחשב בעזרת שוויון זה את השיפוע m' של הישר ℓ' .

מה אפשר לומר על הישר AB ?

הישר עובר דרך הנקודות $A(-2, 3)$ ו- $B(6, 5)$. נוכל לחשב את השיפוע של הישר AB לפי הנוסחה

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

נציב בנוסחה זו את השיעורים של הנקודות A ו- B , ונקבל:

$$m_{AB} = \frac{5-3}{6+2} = \frac{1}{4} \quad (17)$$

נציב בשוויון (16) לפי שורה (17), ונקבל:

$$m' = -4 \quad (18)$$

נמצא את המשוואה של הישר ℓ' לפי הנוסחה

$$y - y_N = m'(x - x_N)$$

כאשר נציב בנוסחה זו לפי שורות (14) ו-(18), נקבל את המשוואה הבאה של הישר ℓ' :

$$y - 4 = -4 \cdot (x - 2)$$

מכאן

$$\ell': y = -4x + 12$$

כעת ברשותנו משוואות של שני ישרים העוברים דרך מרכז המעגל שאת משוואתו התבקשנו למצוא בתחילת הפרק. אם נפתור את המערכת הבאה המורכבת ממשוואות אלו

$$\begin{cases} y = 4x + 4 \\ y = -4x + 12 \end{cases}$$

נקבל כי פתרונה הוא $(1, 8)$. לכן מרכז המעגל המדובר הוא

$$M(1, 8) \quad (19)$$

כעת נחשב את רדיוס המעגל. נשאל את עצמנו: מה זה רדיוס של מעגל?

רדיוס של מעגל הוא אורך הקטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה שרירותית על מעגל זה.¹

מכאן הרדיוס R של המעגל המדובר הוא אורך הקטע המחבר את הנקודות M ו- A :

$$R = AM \quad (20)$$

את אורך הקטע AM נוכל לחשב בעזרת הנוסחה הבאה:

$$AM = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2}$$

נציב בנוסחה זו את השיעורים של הנקודות A ו- M , ונקבל:

$$AM = \sqrt{(-2-1)^2 + (3-8)^2} = \sqrt{34} \text{ יח'} \quad (21)$$

משורות (20) ו-(21) נובע כי

$$R = \sqrt{34} \text{ יח'} \quad (22)$$

כאשר נציב בנוסחה (4) לפי שורות (19) ו-(22) נקבל כי משוואת המעגל המדובר היא

$$(x-1)^2 + (y-8)^2 = 34$$

¹ גם הקטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה שרירותית על מעגל זה נקרא רדיוס המעגל. לפעמים יש כמה תשובות שונות לאותה שאלה. צריך לדעת לבחור בתשובה המתאימה.

הערה. בפתרון השני לבעיה הנתונה יכולנו לקבל את שוויון (22) אחרת: לאחר שקיבלנו את השיעורים של נקודה M יכולנו להציב אותם בנוסחה (4) ולקבל את הנוסחה הבאה למשוואת המעגל הנדרשת:

$$(x-1)^2 + (y-8)^2 = R^2 \quad (23)$$

המעגל המדובר עובר דרך הנקודה $A(-2, 3)$. לכן השיעורים של נקודה זו מקיימים את המשוואה האחרונה. כלומר מתקיים:

$$(-2-1)^2 + (3-8)^2 = R^2$$

מכאן

$$R^2 = 34$$

15. לגעת במעגל

גם היום, אף על פי שהוא כבר סב, אפשר להבחין שבצעירותו איש זה היה בחור נאה שמשך את תשומת לבן של בחורות רבות. זמן מה לאחר שפגש את אשתו לעתיד, קבעו השניים לנסוע לחוף אגם לשחות ולהשתזף.

לאחר שקבעו את הפגישה, חזר האיש הצעיר לביתו והביט בעצמו במראה. הוא לא היה מרוצה ממה שראה. בחירת לבו היתה יפהפיה מהממת מאותו סוג של נשים צעירות שאי אפשר לחשוד בהן שהן אנורקטיות, והיא התהדרה בפרופורציות עוצרות נשימה. הוא פחד שבבגד ים ייראה לידה כמו דחליל. האיש הצעיר החליט שעליו לנפח שרירים בדחיפות, ועליו להספיק לעשות זאת עד המפגש הקרוב עם בחירת לבו. אף על פי שגופו כאב, מפני שעבר זמן רב מאז עשה פעילות ספורטיבית, הוא התמיד והרים משקולות כבדות במשך שעות ארוכות בכל יום שנותר עד הפגישה. ומה הייתה התוצאה? שום שינוי מהותי מלבד כאבי הגב אשר קיבל, ואשר מזכירים לו גם היום את אותם ימים. הוא למד לקח: לא מפתחים שרירים בתוך כמה ימים. גם יכולת גבוהה של חשיבה מתמטית לא מפתחים במשך שבוע-שבועיים; ומתמטיקה היא כמו אישה קנאית, היא דורשת תשומת לב יום-יומית, וכשמבקשים את ברכתה, מענישה המתמטיקה את כל אלו שזלזלו בה.

בעיה. נתון משולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$). אחד מקודקודי המשולש הוא הנקודה $A(7,14)$. משוואת המעגל החסום במשולש ABC היא

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25.$$

מצאו את משוואת הישר BC .

דרך החשיבה ופתרון.

מה צריך למצוא?

צריך למצוא את משוואת הישר BC .

כיצד מוצאים את המשוואה של ישר מסוים?

בעיות מסוג זה פותרים לעתים קרובות בדרך הבאה: מוצאים את השיפוע m של הישר ואת השיעורים x_1 ו- y_1 של אחת מהנקודות הנמצאות עליו; לאחר מכן מציבים את המספרים שנמצאו בנוסחה הבאה למשוואה של ישר עם שיפועו m ואשר עובר דרך הנקודה (x_1, y_1) :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

מה נתון?

נתון כי

$$AB = AC \quad (1)$$

גם נתון כי

$$A(7,14)$$

ונתונה משוואת המעגל החסום במשולש ABC . המשוואה היא:

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25$$

על סמך משוואה זו מסיקים כי

מרכז המעגל החסום במשולש ABC נמצא בנקודה $M(2,4)$

ורדיוס R של מעגל זה הוא 5 יח':

$$R = 5 \text{ יח'}$$

את שיעוריה של איזו נקודה על הישר BC נוכל לנסות למצוא:

במטרה לנסות לענות על שאלה זו נשאל את עצמנו: מה אפשר לומר על הישר BC ? ראשית,

הקטע BC הנמצא על ישר זה הוא בסיס במשולש ABC .

שנית,

הישר BC משיק למעגל הנתון.

באיזו נקודה הישר BC משיק למעגל הנתון?

במטרה לענות על שאלה זו נשאל את עצמנו : באיזה משפט גיאומטרי מוזכרת נקודת ההשקה בין ישר למעגל?

היא מוזכרת במשפט שלפיו : **הזווית בין משיק למעגל לרדיוס הנפגשים בנקודת ההשקה היא בת 90° (קיים גם משפט הפוך : ישר המאונך לרדיוס ועובר דרך קצהו שעל המעגל, הוא משיק למעגל).** לכן אם נסמן ב- N את נקודת ההשקה בין ישר BC למעגל הנתון, נוכל לומר כי

$$MN \perp BC \quad (2)$$

ניעזר במשפט שלפיו : **מרכז המעגל החסום במשולש הוא נקודת המפגש של חוצי הזוויות של המשולש.** לכן

$$\text{הקרן } AM \text{ היא חצה הזווית } BAC. \quad (3)$$

הזווית BAC היא זווית הראש במש"ש ABC (ראו טענה (1)). מכאן ומטענה (3) נובע כי

$$AM \perp BC \quad (4)$$

(לפי המשפט : **במשולש שווה שוקיים, חוצה זווית הראש מתלכד עם הגובה לבסיס**). מנקודה הנמצאת מחוץ לישר אפשר להוריד אנך אחד ויחיד לישר זה. לכן מטענות (2) ו-(4) נובע כי

$$\text{הישר } AM \text{ מתלכד עם הישר } MN$$

מכאן נובע כי

$$\text{הישר } AM \text{ חותך את הישר } BC \text{ בנקודה } N. \quad (5)$$

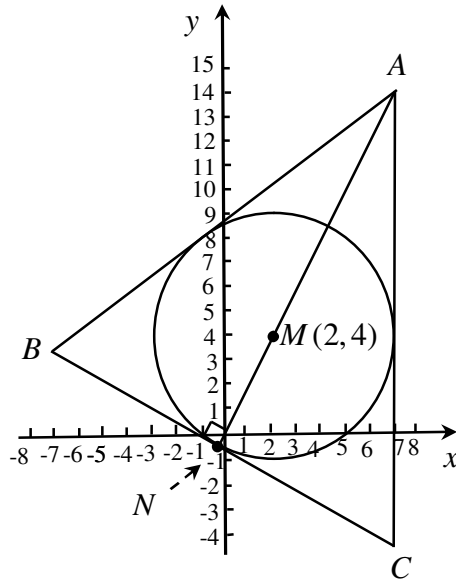
לפי הסימון שנעשה לעיל

$$\text{הנקודה } N \text{ היא נקודת ההשקה בין הישר } BC \text{ למעגל הנתון.} \quad (6)$$

מטענות (5) ו-(6) נובע כי

$$\text{הנקודה } N \text{ היא נקודת החיתוך בין הישר } AM \text{ למעגל הנתון.}$$

לכן הזוג הסדור של שיעורי הנקודה N הוא פתרון של המערכת המורכבת ממשוואת הישר AM וממשוואת המעגל החסום במשולש ABC .



מצאו בעצמכם בתור תרגיל את משוואת הישר AM . עליכם לקבל כי

$$\ell_{AM} : y = 2x \quad (7)$$

לאחר מכן פתרו את המערכת

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-4)^2 = 25 \\ y = 2x \end{cases} \quad (8)$$

למערכת זו שני פתרונות. אחד הפתרונות הוא $(2 - \sqrt{5}, 4 - 2\sqrt{5})$. הפתרון השני הוא

$(2 + \sqrt{5}, 4 + 2\sqrt{5})$. איזה מפתרונות אלו הוא הזוג הסדור של שיעורי הנקודה N ?

המעגל M חותך את הישר AM בשתי נקודות: בנקודת ההשקה בין הישר BC לבין

המעגל M (היא מסומנת ב- N), ובנקודה הנמצאת בתוך משולש ABC . הנקודה

האחרונה נמצאת בתוך הקטע AN , כלומר היא נמצאת על הקטע AN , אך לא מתלכדת עם אף אחד מקצותיו.

הנקודות $A(7, 14)$, $(2 - \sqrt{5}, 4 - 2\sqrt{5})$ ו- $(2 + \sqrt{5}, 4 + 2\sqrt{5})$ נמצאות על הישר AM .

מכאן ומהאי-שוויונים

$$2 - \sqrt{5} < 2 + \sqrt{5} < 7$$

נובע כי הנקודה $(2 + \sqrt{5}, 4 + 2\sqrt{5})$ נמצאת בתוך הקטע המחבר את הנקודה $A(7,14)$ עם הנקודה $(2 - \sqrt{5}, 4 - 2\sqrt{5})$.
מהנאמר לעיל נובע כי

$$N(2 - \sqrt{5}, 4 - 2\sqrt{5}) \quad (9)$$

על סמך טענות (4) ו-(7) מקבלים כי

$$m_{BC} = -\frac{1}{m_{AB}} = -\frac{1}{2} \quad (10)$$

בהסתמך על שורות (9) ו-(10) מקבלים את המשוואה הבאה של הישר BC :

$$y - 4 + 2\sqrt{5} = -\frac{1}{2}(x - 2 + \sqrt{5})$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה הבאה

$$y = -0.5x + 5 - 2.5\sqrt{5}$$

המשוואה האחרונה היא משוואה מפורשת של הישר BC .

16. הם יצאו מאותו מקום

בתחילת החופש הגדול שאלה אשתי את אחיינה: "איך התעודה שלך, איתי?"
 "התעודה שלי מעולה, המועצה הפדגוגית החליטה שאני עולה לכיתה ד'."
 "ולאיזו כיתה היית צריך לעלות, לכיתה ג'?"
 "לא, למדתי השנה בכיתה ג' והמועצה הפדגוגית החליטה שאני עולה לכיתה ד'. לכן תעודה שלי מעולה."

בפרק הקודם מצאנו את משוואת הבסיס BC במשולש שווה השוקיים ABC ($AB = AC$). ברשותנו היו שיעורי נקודה A ומשוואת המעגל החסום במשולש זה. בפרק הנוכחי נמצא את המשוואות של השוקיים AB ו- BC באותו משולש ABC . למעשה אנו לא זקוקים לכל הנתונים שקיבלנו בבעיה הקודמת. נפתור את הבעיה הבאה:

בעיה. נתון מעגל $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25$. מצאו את משוואות המשיקים למעגל זה העוברים דרך נקודה $A(7,14)$.

נפתור את הבעיה בשלוש דרכים שונות.

דרך החשיבה ופתרון א'.

מה צריך למצוא?

צריך למצוא את משוואות המשיקים למעגל

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25 \quad (1)$$

העוברים דרך הנקודה $A(7,14)$.

עלינו למצוא משוואות של ישרים מסוימים. לכן נשאל את עצמנו: כיצד מוצאים את המשוואה של ישר מסוים?

במקרים רבים כדי למצוא משוואת ישר מוצאים קודם כל את השיעורים של שתי נקודות הנמצאות על הישר.

ומה עושים לאחר שמקבלים כי הישר עובר דרך נקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) ?

אם $x_1 = x_2$, מסיקים כי משוואת הישר היא

$$x = x_1$$

אם $y_1 = y_2$, מסיקים כי משוואת הישר היא

$$y = y_1$$

אם $x_1 \neq x_2$ וגם $y_1 \neq y_2$, נעזרים בנוסחה הבאה למשוואת ישר העובר דרך שתי נקודות:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (2)$$

או מוצאים את שיפוע הישר לפי הנוסחה

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (3)$$

ונעזרים בנוסחה הבאה למשוואת ישר ששיפועו m העובר דרך נקודה (x_1, y_1) :

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad (4)$$

אם במצב של $y_1 = y_2$ היה לכם קושי להבחין בכך שמשוואת הישר היא $y = y_1$ יש

באפשרותכם להיעזר בנוסחה (3) ולקבל כי $m = 0$, ולאחר מכן להיעזר בנוסחה (4).

נציין כי המשוואה הבאה שקולה למשוואה (4):

$$y - y_2 = m(x - x_2)$$

לפי הנתון הישרים שעלינו למצוא את משוואותיהם עוברים דרך הנקודה $A(7,14)$. אם נצליח למצוא עבור כל אחד מישרים אלו את השיעורים של עוד נקודה אחת הנמצאת עליו, נוכל למצוא את המשוואות המבוקשות בדרכים המתוארות לעיל.

איזו נקודה מיוחדת, כלומר נקודה שיש משהו מיוחד אותה מנקודות אחרות, קיימת על

משיק למעגל?

זוהי נקודת ההשקה.

באיזה משפט גיאומטרי נזכרים משיק למעגל ונקודת ההשקה?

קיים משפט שלפיו: **הזווית בין משיק למעגל לרדיוס הנפגשים בנקודת ההשקה היא בת**

90° . ישנו גם משפט הפוך, ולפיו: **ישר המאונך לרדיוס ועובר דרך קצהו שעל המעגל, הוא**

משיק למעגל. על סמך שני משפטים אלה מסיקים כי:

אם ישר ℓ עובר דרך נקודה A אשר נמצאת מחוץ למעגל, הוא משיק למעגל
הנתון אך ורק אם ישר זה גם עובר דרך נקודה B , המקיימת את שני התנאים
(הבאים: א) נקודה B נמצאת על המעגל הנתון; ב) מנקודה B רואים את
(5) הקטע המחבר את נקודה A עם מרכז המעגל הנתון בזווית ישרה.

נקודה B מקיימת את שני התנאים הנזכרים בטענה (5) אך ורק אם היא נקודה
משותפת למעגל הנתון ולמקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמהן רואים בזווית ישרה את
הקטע המחבר את נקודה A עם מרכז המעגל הנתון.

מה הם השיעורים של מרכז המעגל הנתון?

מרכזו של מעגל זה נמצא בנקודה $(2, 4)$. נסמן את נקודה זו ב- M .

כעת נשאל את עצמנו: מהו המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמהן רואים את הקטע

AM בזווית ישרה?

כפי שהראינו בפרק 12, מקום גיאומטרי זה הוא המעגל (להוציא נקודות A ו- M) שהקטע

AB הוא קוטרו. מרכז המעגל האחרון הוא אמצע הקטע AM . רדיוס של מעגל זה שווה

למרחק בין אמצע הקטע AM לבין נקודה M . מצאו בעצמכם בתור תרגיל את משוואת

המעגל האחרון. עליכם לקבל את המשוואה הבאה:

$$(x - 4.5)^2 + (y - 9)^2 = 31.25$$

כעת עלינו לפתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-4)^2 = 25 \\ (x-4.5)^2 + (y-9)^2 = 31.25 \end{cases}$$

מערכת משוואות זו שקולה למערכת המשוואות הבאה :

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-4)^2 = 25 \\ (x-4.5)^2 + (y-9)^2 - (x-2)^2 - (y-4)^2 = 31.25 - 25 \end{cases} \quad (6)$$

המשוואה השנייה במערכת המשוואות האחרונה שקולה למשוואה הבאה :

$$x = -2y + 15$$

לכן מערכת (6) שקולה למערכת הבאה :

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-4)^2 = 25 \\ x = -2y + 15 \end{cases} \quad (7)$$

נציב במשוואה הראשונה של מערכת זו לפי המשוואה השנייה, ונקבל את המשוואה הבאה :

$$(13-2y)^2 + (y-4)^2 = 25$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה הבאה :

$$y^2 - 12y + 32 = 0$$

פתרונות משוואה זו הם :

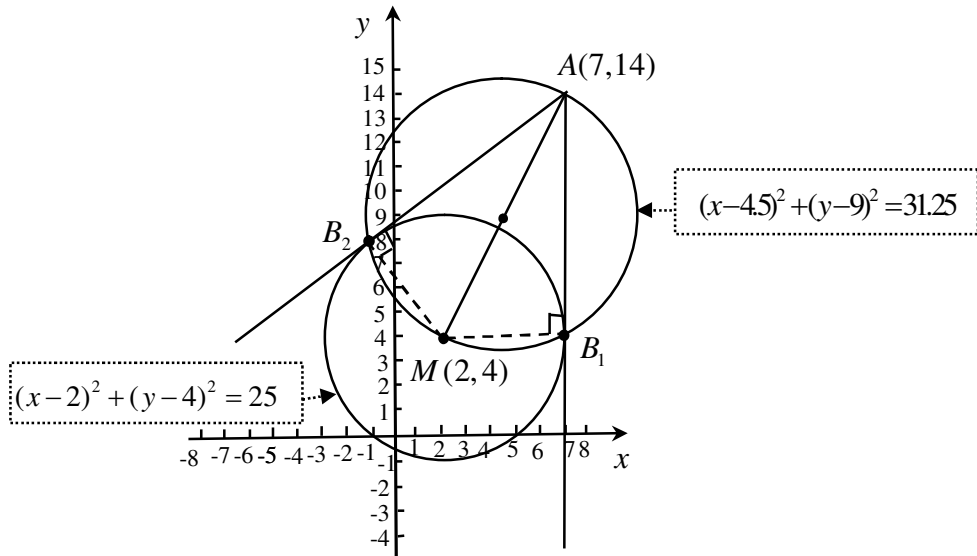
$$y_1 = 4, \quad y_2 = 8 \quad (8)$$

נציב במשוואה השנייה של מערכת (7) לפי שורה (8), ונקבל :

$$x_1 = 7, \quad x_2 = -1$$

קיבלנו כי המעגל הנתון והמקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמהן רואים את הקטע

AM בזווית ישרה נחתכים בנקודות $B_1(7, 4)$ ו- $B_2(-1, 8)$.



המשיקים למעגל הנתון העוברים דרך נקודה A הם הישרים AB_1 ו- AB_2 .

שיעורי ה- x של הנקודות A ו- B_1 שווים לאותו מספר: ל- 7 . לכן משוואת הישר AB_1

היא:

$$x = 7$$

שיעורי ה- x של הנקודות A ו- B_2 שונים זה מזה. לכן שיפוע הישר AB_2 מוגדר. נציב

בנוסחה (3) את השיעורים של הנקודות A ו- B_2 לפי השוויונים:

$$x_1 = 7, y_1 = 14, x_2 = -1, y_2 = 8 \quad (9)$$

נקבל:

$$m = \frac{8-14}{-1-7} = \frac{3}{4}$$

נציב בנוסחה (4) את $m = \frac{3}{4}$ ואת שיעורי נקודה A . נקבל את המשוואה הבאה של

הישר AB_2 :

$$y - 14 = \frac{3}{4}(x - 7)$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה הבאה :

$$y = \frac{3}{4}x + 8\frac{3}{4} \quad (10)$$

עכשיו נקבל את משוואת הישר AB_2 בדרך אחרת: ניעזר בנוסחה (2). נציב בנוסחה זו לפי שורה (9), ונקבל :

$$\frac{x-7}{-1-7} = \frac{y-14}{8-14}$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה הבאה :

$$\frac{x-7}{-8} = \frac{y-14}{-6}$$

משוואה זו שקולה למשוואה (10).

תשובה: $x = 7$, $y = \frac{3}{4}x + 8\frac{3}{4}$.

דרך החשיבה ופתרון ב'.

מה צריך למצוא?

צריך למצוא את משוואות המשיקים למעגל

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25 \quad (11)$$

העוברים דרך הנקודה $A(7,14)$.

ניעזר בנוסחה הבאה למשוואת הישר ששיפועו m העובר דרך הנקודה (x_1, y_1) :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

בהסתמך על נוסחה זו מסיקים כי כל ישר אשר עובר דרך הנקודה $A(7,14)$ ולא מאונך לציר ה- x מיוצג על ידי משוואה מן הצורה:

$$y - 14 = m(x - 7)$$

משוואה זו שקולה למשוואה הבאה:

$$y = mx - 7m + 14 \quad (12)$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה הבאה:

$$-mx + y + 7m - 14 = 0 \quad (13)$$

נסמן ב- ℓ_m את הישר המיוצג על ידי משוואה (13).

נציין כי משפחת הישרים המיוצגים על ידי משוואה מן הצורה (13) היא משפחה של כל הישרים העוברים דרך $A(7,14)$ ואינם מאונכים לציר ה- x .

נציין גם כי משפחת ישרים זו לא כוללת את הישר $x = 7$, אשר גם עובר דרך הנקודה $A(7,14)$ כיוון שהישר האחרון מאונך לציר ה- x ושיפועו לא מוגדר.

עד כה נעזרנו רק בכך שהישרים שאת משוואותיהם עלינו למצוא עוברים דרך הנקודה $A(7,14)$. במה מהנתון טרם נעזרנו?

לא נעזרנו בכך שהישרים המדוברים הם משיקים למעגל $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25$.

איזה משפט גיאומטרי יכול לעזור לנו לפתור את הבעיה? אילו משפטים גיאומטריים אודות משיקים קיים?

המטרה של השאלה האחרונה היא לאלץ את פותר הבעיה להיזכר במשפט שלפיו:

הזווית בין משיק למעגל לרדיוס הנפגשים בנקודת ההשקה היא בת 90° .

לאורך האנך המורד לישר מהנקודה הנמצאת מחוץ לישר קוראים מרחק בין ישר הנקודה לבין הישר. לכן על סמך המשפט אשר הזכרנו ניתן להסיק כי

מרחק בין מרכז המעגל למשיק למעגל שווה לרדיוס המעגל. (14)

האם מתקיימת גם הטענה ההפוכה לזו? האם כל ישר אשר נמצא במרחק שווה לרדיוס המעגל ממרכז המעגל, משיק למעגל?

כן,

(15) כל ישר אשר נמצא במרחק שווה לרדיוס המעגל ממרכז המעגל, משיק למעגל.

באמת, אם ישר ℓ נמצא במרחק R ממרכז המעגל M שרדיוסו R , אז אורך האנך המורד מנקודה M לישר ℓ שווה ל- R ; לפי כך הקצה של האנך הנ"ל אשר נמצא על הישר ℓ , נמצא גם על המעגל המדובר (הרי המעגל שמרכזו M רדיוסו R הוא אוסף של כל הנקודות במישור הנמצאות במרחק R מהנקודה M); מכאן נובע כי טענה (15) מתקיימת (לפי המשפט הבא: **ישר המאונך לרדיוס ועובר דרך קצהו שעל המעגל, הוא משיק למעגל**). כדי שנוכל להיעזר בטענות (14) ו-(15) לפתרון הבעיה עלינו למצוא את מרכז המעגל הנתון בבעיה ואת רדיוסו.

על סמך משוואה (1) מסיקים כי מרכז המעגל הנתון נמצא בנקודה $M(2, 4)$ ורדיוסו שווה ל-5 יח':

$$R = 5 \text{ יח'}$$

במשפחת הישרים המיוצגת על ידי משוואה (13) ננסה להבחין במשוואה של הישר הנמצא במרחק 5 יח' מנקודה $M(2, 4)$.

על סמך טענות (14) ו-(15) מגיעים למסקנה כי

(16) **ישר משיק למעגל הנתון בבעיה אך ורק אם הוא נמצא במרחק 5 יח' מנקודה $M(2, 4)$.**

נשאל את עצמנו: מהי הנוסחה למציאת מרחק בין נקודה לישר?

את המרחק d בין נקודה (x_0, y_0) לישר, המיוצג על ידי המשוואה הכללית

$$ax + by + c = 0, \text{ אפשר לחשב לפי הנוסחה הבאה:}$$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (17)$$

על סמך נוסחה זו מסיקים כי עבור המרחק $d(M, \ell_m)$ בין נקודה $M(2,4)$ לבין הישר ℓ_m המיוצג על ידי משוואה (13) מתקיים :

$$d(M, \ell_m) = \frac{|-2m+4+7m-14|}{\sqrt{m^2+1^2}} = \frac{5|m-2|}{\sqrt{m^2+1}} \quad (18)$$

על סמך טענה (16) ושורה (18) מסיקים כי הישר ℓ_m משיק למעגל הנתון בבעיה אך ורק אם מתקיים :

$$\frac{5|m-2|}{\sqrt{m^2+1}} = 5$$

נתייחס לשוויון זה כאל משוואה עם הנעלם m ונפתור משוואה זו :

$$\frac{5|m-2|}{\sqrt{m^2+1}} = 5 \Leftrightarrow |m-2| = \sqrt{m^2+1} / ()^2 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 4 = m^2 + 1 \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}$$

נציב את $m = \frac{3}{4}$ במשוואה (12), ונקבל את המשוואה הבאה של הישר המשיק למעגל

הנתון ועובר דרך הנקודה $A(7,14)$:

$$y = \frac{3}{4}x + 8\frac{3}{4}$$

דרך נקודה הנמצאת מחוץ למעגל אפשר להעביר שני משיקים למעגל, אך קיבלנו רק משוואה אחת - של אחד משני הישרים העוברים דרך הנקודה $A(7,14)$ ומשיקים למעגל הנתון.

מדוע לא קיבלנו את המשוואה של המשיק השני?

כי לא התבוננו בכל הישרים העוברים דרך נקודה A ; חיפשנו את משוואות המשיקים אך ורק בין משוואות מן הצורה (13) ; משפחת הישרים המיוצגת על ידי משוואה (13) כוללת את כל הישרים שאינם מאונכים לציר ה- x אשר עוברים דרך נקודה A ; משפחת ישרים זו אינה כוללת את הישר העובר דרך נקודה A ומאונך לציר ה- x . נראה כי הישר האחרון משיק למעגל הנתון.

מהי המשוואה של הישר העובר דרך נקודה $A(7,14)$ ומאונך לציר ה- x ?

המשוואה של ישר זה היא

$$x = 7$$

מהו המרחק בין הישר האחרון לבין הנקודה $M(2,4)$?

כדי לענות על שאלה זו נשאל את עצמנו: כיצד מחשבים מרחק d בין נקודה (x_1, y_1)

לישר $x = x_0$?

הדרך הפשוטה ביותר לחישוב מרחק זה היא להיעזר בנוסחה

$$d = |x_1 - x_0|$$

לפי נוסחה זו המרחק בין הנקודה $M(2,4)$ לישר $x = 7$ הוא

$$d = |2 - 7| = 5 \text{ יח'}$$

קיבלנו כי

המרחק בין הנקודה $M(2,4)$ לישר $x = 7$ שווה לרדיוס המעגל הנתון.

לכן הישר $x = 7$ משיק למעגל זה.

$$\text{תשובה: } x = 7, y = \frac{3}{4}x + 8\frac{3}{4}$$

דרך החשיבה ופתרון ג'.

כמו בפתרון הבעיה בשיטה הקודמת, נקבל כי משוואת הישר ששיפועו m העובר דרך

הנקודה $A(7,14)$ היא

$$y = mx - 7m + 14 \quad (19)$$

לאחר מכן נשאל את עצמנו: מהו משיק למעגל?

משיק למעגל הוא ישר שיש לו נקודה אחת משותפת עם המעגל.

מכאן ישר (19) משיק למעגל

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 25 \quad (20)$$

אך ורק אם למערכת

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-4)^2 = 25 \\ y = mx - 7m + 14 \end{cases} \quad (21)$$

יש פתרון יחיד (שני פתרונות שווים).

נציב במשוואה הראשונה של מערכת זו לפי המשוואה השנייה, ונקבל את המשוואה

הבאה :

$$(x-2)^2 + (mx-7m+10)^2 = 25$$

משוואה זו שקולה למשוואה הבאה :

$$(m^2 + 1)x^2 - (14m^2 - 20m + 4)x + 49m^2 - 140m + 79 = 0 \quad (22)$$

זו משוואה ריבועית. למשוואה ריבועית יכולים להיות שני פתרונות שונים, שני פתרונות שווים זה לזה (במקרה זה אומרים לעתים קרובות שלמשוואה ריבועית יש פתרון יחיד) או שאין אף פתרון.

אם למשוואה (22) יש פתרון יחיד, אז גם למערכת (21) יש פתרון יחיד ; אם למשוואה (22) יש שני פתרונות שונים, אז גם למערכת (21) יש שני פתרונות שונים ; אם למשוואה (22) אין אף פתרון, אז גם למערכת (21) אין אף פתרון.

למשוואה (22) יש פתרון יחיד (שני פתרונות שווים זה לזה) אך ורק אם הדיסקרימיננטה

שלה

$$\Delta = (14m^2 - 20m + 4)^2 - 4(m^2 + 1)(49m^2 - 140m + 79)$$

שווה ל-0.

לאחר פתיחת סוגריים וכינוס איברים דומים נקבל כי

$$\Delta = 400m - 300$$

נפתור את המשוואה :

$$400m - 300 = 0$$

נקבל :

$$m = \frac{3}{4}$$

נציב את $m = \frac{3}{4}$ במשוואה (12) ונקבל את המשוואה הבאה של הישר המשיק למעגל הנתון ועובר דרך הנקודה $A(7,14)$:

$$y = \frac{3}{4}x + 8\frac{3}{4}$$

עדיף להראות שהישר $x = 7$ משיק למעגל הנתון בשיטה הקודמת. אפשר גם להראות כי למערכת

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-4)^2 = 25 \\ x = 7 \end{cases}$$

יש פתרון יחיד. עשו זאת בעצמכם בתור תרגיל.

17. אחדות היא כוח

שלושה חכמים עיוורים החליטו לחקור ולברר מה זה פיל. החכם הראשון נגע ברגלו של הפיל ואמר כי הפיל דומה לעמוד; החכם השני נגע בצדו של הפיל ואמר כי הפיל דומה לקיר, החכם השלישי נגע בזנבו של הפיל ואמר כי הפיל הוא נחש.

(משל הודי)

תלמידים אשר תוך כדי פתרון בעיה בגיאומטריה אנליטית מצליחים להרכיב מספר משוואות עם אותו מספר נעלמים, אך לא מתבוננים במערכת המורכבת ממשוואות אלו – מזכירים לי את החכמים העיוורים מהמשל ההודי העתיק.

בעיה. נתון מעגל $(x-22)^2 + (y-50)^2 = 1480$.

א) הוכיחו כי נקודה $E(10,15)$ נמצאת בתוך המעגל הנתון.

ב) מיתר AB עובר דרך נקודה E . הקטע BE גדול פי 3 מהקטע AE . מצאו את שיעורי הקצוות של המיתר AB ואת אורכו.

דרך החשיבה ופתרון סעיף א'.

מה צריך להוכיח?

צריך להוכיח כי נקודה $E(10,15)$ נמצאת בתוך המעגל $(x-22)^2 + (y-50)^2 = 1480$.

כיצד אפשר לקבוע אם נקודה נמצאת בתוך מעגל, על מעגל או מחוץ למעגל?

נקודה במישור נמצאת על מעגל שמרכזו בנקודה M ורדיוסו R אך ורק אם המרחק

שלה מנקודה M שווה ל- R ; נקודה במישור נמצאת בתוך מעגל שמרכזו בנקודה M

ורדיוסו R אך ורק אם המרחק שלה מנקודה M קטן מ- R ; נקודה במישור נמצאת

מחוץ למעגל שמרכזו בנקודה M ורדיוסו R אך ורק אם המרחק שלה מנקודה M גדול

מ- R .

כעת מובן כי עלינו להוכיח כי המרחק בין נקודה E לבין מרכז המעגל הנתון קטן מרדיוס המעגל.

מהם השיעורים של מרכז המעגל הנתון ושל רדיוסו?

מרכז המעגל הנתון נמצא בנקודה $M(22, 50)$. רדיוס המעגל שווה ל- $\sqrt{1480}$ יח':

$$R = \sqrt{1480} \text{ יח'} \quad (1)$$

נמצא את המרחק בין נקודות E ו- M לפי הנוסחה

$$d(M, E) = \sqrt{(x_E - x_M)^2 + (y_E - y_M)^2}$$

נציב בנוסחה זו את השיעורים של נקודות E ו- M . נקבל:

$$d(M, E) = \sqrt{(10 - 22)^2 + (15 - 50)^2}$$

עלינו להראות כי

$$d(M, E) < R \quad (2)$$

כלומר עלינו להראות כי

$$\sqrt{(10 - 22)^2 + (15 - 50)^2} < \sqrt{1480}$$

האי-שוויון האחרון מתקיים אך ורק אם מתקיים:

$$(10 - 22)^2 + (15 - 50)^2 < 1480 \quad (3)$$

אפשר לקבל את האי-שוויון האחרון גם בדרך הבאה: יכולנו להציב במשוואת המעגל

הנתון את השיעורים של נקודה E ולהחליף את הסימן $=$ בסימן $<$.

האגף השמאלי של האי-שוויון (3) שווה ל-1380. לכן אי-שוויון זה מתקיים. מכאן נובע

כי אי-שוויון (2) מתקיים. לכן נקודה E נמצאת בתוך המעגל הנתון.

דרך החשיבה ופתרון א' לסעיף ב'.

מה צריך למצוא?

צריך למצוא את שיעורי הקצוות של המיתר AB במעגל הנתון ואת אורכו של מיתר זה.

מה נאמר בבעיה על מיתר AB ?

לפי הנתון

$$(4) \quad \text{המיתר } AB \text{ עובר דרך נקודה } E(10,15).$$

כמו כן נתון כי

$$(5) \quad BE = 3AE$$

כיצד מוצאים את אורכו של מיתר במעגל?

בגיאומטריה אנליטית אפשר לעתים קרובות לפתור בעיות מסוג זה בדרך הבאה:
מוצאים את שיעורי קצות המיתר, ולאחר מכן נעזרים בנוסחה לחישוב מרחק בין שתי נקודות.

ננסה לפתור את הבעיה בדרך זו. ראשית ננסה למצוא את שיעורי הנקודות A ו- B .
זאת בעיה עם ארבעה נעלמים. ננסה להרכיב ארבע משוואות עם נעלמים אלו.

נתבונן שוב בנתונים בבעיה. לפי הנתון

$$(6) \quad \text{הקטע } AB \text{ הוא מיתר במעגל } (x-22)^2 + (y-50)^2 = 1480.$$

נשאל את עצמנו: מהו מיתר במעגל?

מיתר במעגל הוא קטע ששני קצותיו נמצאים על המעגל. לכן טענה (6) מתקיימת אך ורק

אם

$$\text{הנקודות } A \text{ ו- } B \text{ נמצאות על המעגל } (x-22)^2 + (y-50)^2 = 1480.$$

נקודה A נמצאת על המעגל הנתון אך ורק אם שיעוריה מקיימים את משוואת המעגל,
כלומר אך ורק אם מתקיים:

$$(x_A - 22)^2 + (y_A - 50)^2 = 1480$$

גם נקודה B נמצאת על המעגל הנתון אך ורק אם מתקיים:

$$(x_B - 22)^2 + (y_B - 50)^2 = 1480$$

בהסתמך על טענה (6) הרכבנו שתי משוואות עם הנעלמים x_A, y_A, x_B, y_B .

במה מהנתון בבעיה עוד לא השתמשנו?

לא השתמשנו בטענות (4) ו-(5). כשמתבוננים בטענות אלו כדאי להיזכר במשפט שלפיו:

אם נקודה $P(x_P, y_P)$ מחלקת את הקטע AB , המחבר את הנקודות $A(x_A, y_A)$ ו-

$B(x_B, y_B)$ ביחס $k : l$ (כלומר $\frac{AP}{PB} = \frac{k}{l}$), אז מתקיים:

$$x_P = \frac{lx_A + kx_B}{k + l}, \quad y_P = \frac{ly_A + ky_B}{k + l} \quad (7)$$

על סמך טענות (4) ו-(5) ועל סמך המשפט האחרון מקבלים כי

$$x_E = \frac{3 \cdot x_A + 1 \cdot x_B}{3 + 1}, \quad y_E = \frac{3 \cdot y_A + 1 \cdot y_B}{3 + 1} \quad (8)$$

נציב בשוויונים הרשומים בשורה (8) את השיעורים של נקודה $E(10, 15)$, ונקבל:

$$10 = \frac{3x_A + x_B}{4}$$

$$15 = \frac{3y_A + y_B}{4}$$

כעת ברשותנו המערכת

$$\begin{cases} (x_A - 22)^2 + (y_A - 50)^2 = 1480 \\ (x_B - 22)^2 + (y_B - 50)^2 = 1480 \\ 10 = \frac{3x_A + x_B}{4} \\ 15 = \frac{3y_A + y_B}{4} \end{cases} \quad (9)$$

של ארבע משוואות עם ארבעה נעלמים. נפתור אותה בשתי דרכים שונות.

פתרון מערכת (9). דרך א'.

ראשית נבודד את x_B במשוואה השלישית ואת y_B במשוואה הרביעית של המערכת.

נקבל את מערכת המשוואות הבאה.

$$\begin{cases} (x_A - 22)^2 + (y_A - 50)^2 = 1480 \\ (x_B - 22)^2 + (y_B - 50)^2 = 1480 \\ x_B = 40 - 3x_A \\ y_B = 60 - 3y_A \end{cases} \quad (10)$$

נציב במשוואה השנייה של מערכת זו לפי המשוואות השלישית והרביעית, ונקבל:

$$\begin{cases} (x_A - 22)^2 + (y_A - 50)^2 = 1480 \\ (18 - 3x_A)^2 + (10 - 3y_A)^2 = 1480 \\ x_B = 40 - 3x_A \\ y_B = 60 - 3y_A \end{cases}$$

נחסר מהמשוואה השנייה של המערכת האחרונה את המשוואה הראשונה המוכפלת ב-9.

נקבל את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} (x_A - 22)^2 + (y_A - 50)^2 = 1480 \\ (18 - 3x_A)^2 - 9(x_A - 22)^2 + (10 - 3y_A)^2 - 9(y_A - 50)^2 = -11840 \\ x_B = 40 - 3x_A \\ y_B = 60 - 3y_A \end{cases} \quad (11)$$

המשוואה השנייה במערכת האחרונה שקולה למשוואה הבאה:

$$288x_A + 840y_A = 14592$$

נבודד את y_A במשוואה האחרונה:

$$y_A = -\frac{12}{35}x_A + 17\frac{13}{35} \quad (12)$$

קיבלנו כי מערכת משוואות (9) שקולה למערכת הבאה:

$$\begin{cases} (x_A - 22)^2 + (y_A - 50)^2 = 1480 \\ y_A = -\frac{12}{35}x_A + 17\frac{13}{35} \\ x_B = 40 - 3x_A \\ y_B = 60 - 3y_A \end{cases} \quad (13)$$

נציב במשוואה הראשונה של מערכת (13) לפי המשוואה השנייה שלה (כלומר לפי משוואה (12)), ונקבל את המשוואה הבאה:

$$(x_A - 22)^2 + \left(-\frac{12}{35}x_A - 32\frac{22}{35}\right)^2 = 1480$$

לאחר פתיחת סוגריים, העברת כל האיברים לאגף השמאלי של המשוואה וכינוס איברים דומים, נקבל את המשוואה הבאה:

$$\frac{1369}{1225}x_A^2 - \frac{26492}{1225}x_A + \frac{84064}{1225} = 0$$

נכפיל את המשוואה האחרונה ב-1225, ונקבל:

$$1369x_A^2 - 26492x_A + 84064 = 0$$

נפתור את המשוואה האחרונה:

$$(x_A)_{1,2} = \frac{26492 \pm \sqrt{(26492)^2 - 4 \cdot 1369 \cdot 84064}}{2 \cdot 1369} = \frac{26492 \pm 15540}{2 \cdot 1369}$$

מכאן

$$(x_A)_1 = 15\frac{13}{37}, \quad (x_A)_2 = 4$$

קיבלנו כי

$$x_A = 15\frac{13}{37} \quad \text{או} \quad x_A = 4$$

נציב את $x_A = 4$ במשוואות השנייה והשלישית של מערכת (13), ונקבל:

$$, y_A = 16 \quad (14)$$

$$x_B = 28$$

נציב במשוואה הרביעית של מערכת (13) לפי שורה (14), ונקבל:

$$y_B = 12$$

$$\text{באופן דומה נקבל שאם } x_A = 15\frac{13}{37}, \text{ אז}$$

$$y_A = 12\frac{4}{37}, x_B = -6\frac{2}{37}, y_B = 23\frac{25}{37}$$

קיבלנו כי

$$x_A = 4, y_A = 16, x_B = 28, y_B = 12 \quad (15)$$

או

$$x_A = 15\frac{13}{37}, y_A = 12\frac{4}{37}, x_B = -6\frac{2}{37}, y_B = 23\frac{25}{37} \quad (16)$$

פתרון של מערכת (9). דרך ב'.

לא מסובך להוכיח כי

$$\text{המיתר } AB \text{ אינו מאונך לציר ה-} x. \quad (17)$$

כיוון שאם המיתר AB מאונך לציר ה- x , אז

$$x_B = 10 \text{ וגם } x_A = 10 \quad (18)$$

(מכיוון שהמיתר AB עובר דרך נקודה $(E(10,15))$, ושיעורי הנקודות A ו- B מקיימים

את מערכת המשוואות המורכבת מהמשוואות הכלולות במערכת (9) ומהמשוואות

הרשומות בשורה (18); קל לבדוק (עשו זאת בעצמכם) כי למערכת זו אין אף פתרון.

באופן דומה מקבלים כי

$$(19) \quad \text{המיתר } AB \text{ אינו מאונק לציר ה-} y.$$

כעת נשים לב שמערכת (9) שקולה למערכת הבאה

$$(20) \quad \begin{cases} (x_A - 22)^2 + (y_A - 50)^2 = 1480 \\ [(x_B - 22)^2 - (x_A - 22)^2] + [(y_B - 50)^2 - (y_A - 50)^2] = 1480 - 1480 \\ x_B = 40 - 3x_A \\ y_B = 60 - 3y_A \end{cases}$$

(חיסרנו מהמשוואה הראשונה של מערכת (9) את המשוואה השנייה, בידדנו את x_B

במשוואה השלישית ואת y_B במשוואה הרביעית).

המשוואה השנייה במערכת המשוואות האחרונה שקולה למשוואה הבאה:

$$(x_B - x_A)(x_A + x_B - 44) + (y_B - y_A)(y_A + y_B - 100) = 0$$

נחלק את המשוואה האחרונה ב- $(x_B - x_A)$ (ראו טענה (17)). נקבל:

$$(21) \quad x_A + x_B - 44 + \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot (y_A + y_B - 100) = 0$$

הביטוי $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ במשוואה האחרונה שווה לשיפוע m_{AB} של הישר AB . לכן נוכל לרשום

את משוואה (21) בצורה הבאה:

$$(22) \quad x_A + x_B - 44 + m_{AB}(y_A + y_B - 100) = 0$$

נציב במשוואה (22) לפי המשוואה השלישית והמשוואה הרביעית במערכת משוואות (10), ונקבל:

$$x_A + 40 - 3x_A - 44 + m_{AB}(y_A + 60 - 3y_A - 100) = 0$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה הבאה:

$$-2x_A - 4 + m_{AB}(-2y_A - 40) = 0$$

משוואה זו שקולה למשוואה הבאה:

$$x_A + 2 + m_{AB}(y_A + 20) = 0$$

נבודד במשוואה האחרונה את הביטוי $y_A + 20$: נקבל:

$$y_A + 20 = -\frac{1}{m_{AB}}(x_A + 2)$$

(מטענה (19) נובע כי $m_{AB} \neq 0$).

נתבונן במשוואה האחרונה ונסה להסיק מסקנות.

אם נתייחס למשוואה זו כאל שוויון שאותו מקיימים שיעורי הנקודה A , נוכל לומר שנקודה זו נמצאת על הישר

$$y + 20 = -\frac{1}{m_{AB}}(x + 2) \quad (23)$$

ומה אפשר לומר על ישר זה?

הישר (23) עובר דרך הנקודה $N(-2, -20)$.

יתרה מזאת, השיפוע של הישר (23) שווה ל- $-\frac{1}{m_{AB}}$, ולכן

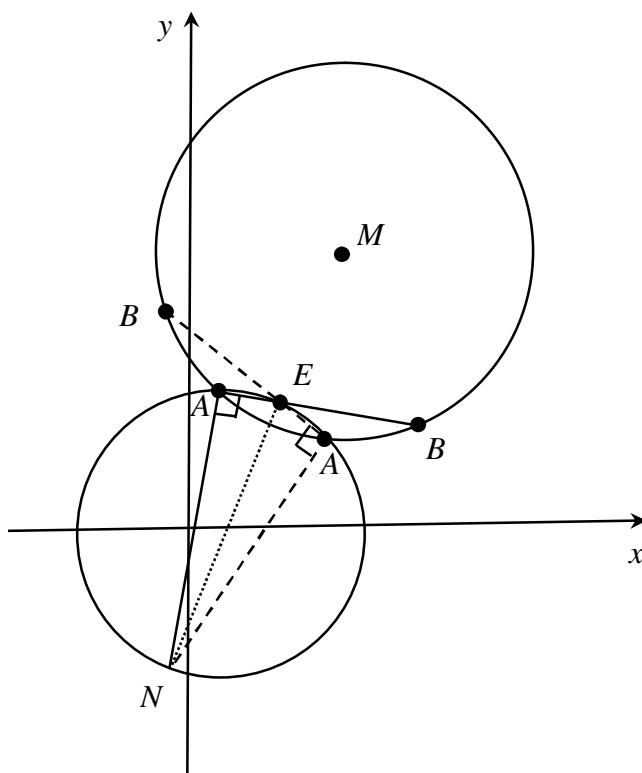
(24) ישר (23) מאונך לישר AB .

נקודה E נמצאת בתוך הקטע AB . לכן טענה (24) מתקיימת אך ורק אם

$$\angle EAN = 90^\circ$$

במילים אחרות, טענה (24) מתקיימת אך ורק אם

מנקודה A רואים את הקטע EN בזווית ישרה.


$$(x-4)^2 + (y+2.5)^2 = 342.25 \quad (25)$$
$$\begin{cases} (x_A - 22)^2 + (y_A - 50)^2 = 1480 \\ (x_A - 4)^2 + (y_A + 2.5)^2 = 342.25 \end{cases}$$

פתרו מערכת משוואות זו בעצמכם בתור תרגיל. עליכם לקבל כי

$$x_A = 15\frac{13}{37}, y_A = 12\frac{4}{37} \quad \text{או} \quad x_A = 4, y_A = 16$$

נציב את $x_A = 4$ במשוואה השלישית, ואת $y_A = 16$ במשוואה הרביעית של מערכת משוואות (9), ונקבל:

$$x_B = 28, y_B = 12$$

אם נציב באותן משוואות את $x_A = 15\frac{13}{37}$ ואת $y_A = 12\frac{4}{37}$, נקבל:

$$x_B = -6\frac{2}{37}, y_B = 23\frac{25}{37}$$

קיבלנו כי

$$x_A = 4, y_A = 16, x_B = 28, y_B = 12 \quad (26)$$

או

$$x_A = 15\frac{13}{37}, y_A = 12\frac{4}{37}, x_B = -6\frac{2}{37}, y_B = 23\frac{25}{37} \quad (27)$$

סיום פתרון א' לסעיף ב'.

עבור שיעורי הנקודות A ו-B הרשומים בשורה (15) (ובשורה (26)) אורך הקטע AB הוא

$$AB = \sqrt{(28-4)^2 + (12-16)^2} = \sqrt{592} \text{ יח'}$$

גם עבור שיעורי הנקודות A ו-B הרשומים בשורה (16) (ובשורה (27)) אורך הקטע AB שווה ל- $\sqrt{592}$ יח':

$$AB = \sqrt{\left(-6\frac{2}{37} - 15\frac{13}{37}\right)^2 + \left(23\frac{25}{37} - 12\frac{4}{37}\right)^2} = \sqrt{592} \text{ יח'}$$

תשובה לסעיף ב': $\sqrt{592}$ יח' (כ- 24.331 יח').

הערה 1. שימו לב כי לא במקרה אורך המיתר ששיעורי קצותיו רשומים בשורה (26) שווה לאורך המיתר שקצותיו רשומים בשורה (27). שני המיתרים סימטריים זה לזה ביחס לישר העובר דרך נקודה E ודרך מרכז המעגל הנתון.

הערה 2. גיאומטריה אנליטית מאפשרת לפתור בעיות רבות של הנדסת המישור בעזרת שימוש באלגברה. הדרך השנייה שבה פתרנו את מערכת משוואות (9) מראה שלפעמים אפשר לפתור בעיות אלגבריות הן בעזרת גיאומטריה אנליטית והן בעזרת משפטים של הנדסת המישור.

דרך החשיבה ופתרון ב' לסעיף ב'.

נתבונן במשולש MAB (נזכיר כי הנקודה $M(22,50)$ היא מרכז המעגל הנתון). הצלעות MA ו- MB של משולש זה הן רדיוסים במעגל הנתון. מכאן ומשוויון (1) נובע כי מתקיים:

$$MA = MB = \sqrt{1480} \quad \text{יח' } (28)$$

נסמן ב- x את אורך הקטע AE וב- h את אורך הגובה MH לבסיס AB במשולש שווה שוקיים MAB :

$$AE = x \quad (29)$$

$$MH = h \quad (30)$$

משוויונים (5) ו-(29) נובע כי מתקיים:

$$EB = 3x$$

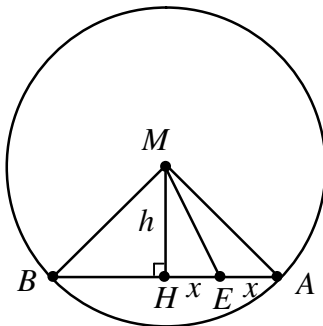
מהשוויון האחרון ומשוויון (29) נובע כי מתקיים:

$$AB = 4x \quad (31)$$

גובה לבסיס במשולש שווה שוקיים הוא גם תיכון. לכן

$$AH = \frac{1}{2} AB$$

משני השוויונים האחרונים נובע כי



$$AH = 2x \quad (32)$$

על סמך שוויונים (29) ו-(32) מקבלים כי מתקיים:

$$EH = 2x - x = x \quad (33)$$

ברשותנו שיעורי הנקודות M ו- E . לכן נוכל לחשב את אורך הקטע ME . נעשה זאת:

$$ME = \sqrt{(x_M - x_E)^2 + (y_M - y_E)^2} = \sqrt{(22-10)^2 + (50-15)^2} = 37 \text{ יח'} \quad (34)$$

לפי משפט פיתגורס מתקיים:

$$MH^2 + EH^2 = ME^2 \quad (35)$$

$$MH^2 + AH^2 = MA^2 \quad (36)$$

נציב בשוויון (35) לפי שורות (30), (33) ו-(34). נקבל:

$$h^2 + x^2 = 1369 \quad (37)$$

נציב בשוויון (36) לפי שורות (28), (30) ו-(32). נקבל:

$$h^2 + 4x^2 = 1480 \quad (38)$$

נתבונן במערכת

$$\begin{cases} h^2 + x^2 = 1369 \\ h^2 + 4x^2 = 1480 \end{cases} \quad (39)$$

המורכבת ממשוואות (37) ו-(38). מערכת משוואות זו שקולה למערכת הבאה:

$$\begin{cases} h^2 + x^2 = 1369 \\ 3x^2 = 111 \end{cases} \quad (40)$$

הפתרון החיובי של המשוואה השנייה במערכת האחרונה הוא:

$$x = \sqrt{37} \quad (41)$$

נציב את ערך ה- x אשר קיבלנו במשוואה הראשונה של מערכת (40). נקבל את המשוואה הבאה:

$$h^2 + 37 = 1369$$

הפתרון החיובי של המשוואה האחרונה הוא :

$$h = \sqrt{1332} \quad (42)$$

משורות (31) ו-(41) נובע כי

$$AB = 4\sqrt{37} \text{ יח'}$$

נציין כי

$$4\sqrt{37} = \sqrt{16 \cdot 37} = \sqrt{592}$$

הפעם הצלחנו למצוא את אורך המיתר AB לפני שמצאנו את שיעורי הנקודות A ו- B . כעת עלינו למצוא את השיעורים של שתי נקודות אלו. בהסתמך על שורות (4), (30) ו-(42) מסיקים כי הנקודות A ו- B הן נקודות החיתוך של הישר אשר עובר דרך הנקודה $E(10,15)$ ונמצא במרחק של $\sqrt{1332}$ יח' מהנקודה $M(22,50)$. ישנם שני ישרים כאלו. הם משיקים למעגל שמרכזו נמצא בנקודה M ורדיוסו שווה ל- $\sqrt{1332}$ יח'. אפשר למצוא את משוואותיהם בדרכים המתוארות בפרק הקודם. נציין כי שני המשיקים למעגל האחרון סימטריים אחד לשני ביחס לישר העובר דרך הנקודות M ו- E . מצאו בעצמכם בתור תרגיל את המשוואות של שני הישרים. לאחר מכן מצאו את נקודות החיתוך של כל אחד מישרים אלו עם המעגל הנתון. כדי שעבור כל זוג של נקודות חיתוך תוכלו להסיק נכון איזו משתי הנקודות היא נקודה A ואיזו היא נקודה B , עליכם לחשב את מרחקן מנקודה E או להיעזר בנוסחאות הרשומות בשורה (7). אפשר למצוא את השיעורים של נקודה A גם בהסתמך על כך שנקודה זו היא נקודת החיתוך של המעגל הנתון עם המעגל שמרכזו נמצא בנקודה $E(10,15)$ ורדיוסו שווה ל- $\sqrt{37}$ יח' (ראו שורות (29) ו-(41)). לאחר מכן אפשר למצוא את שיעורי נקודה B בעזרת הנוסחאות הרשומות בשורה (7). מצאו בעצמכם את השיעורים של הנקודות A ו- B בדרך זו גם כן. ייתכן שאם תתבקשו לפתור בעיה כזו במבחן תעדיפו להרכיב את מערכת (39) ולפתור אותה ולאחר מכן למצוא את השיעורים של הנקודות A ו- B בדרך האחרונה.

18. כשהמעגל פגש את הפרבולה

אחד מבניי הגיע לחופשה קצרה מהצבא. אשתי ואני התכוננו לנסוע למחרת לחיפה להביא אוכל לאחיו התיאום, אשר היה באותה תקופה עתודאי בטכניון וגר במעונות. הזמנו את הבן לנסוע אתנו, אך הוא היה עייף ורצה לנוח.
 "מה יש לראות בחיפה?" שאל.
 "את אחיך."
 "בשביל זה אני לא חייב לנסוע לחיפה, אני יכול להסתכל במראה."

בעיה. נתונים פרבולה קנונית ומעגל אשר נחתכים בנקודות A, B, C ו- O (אף שתיים מהנקודות לא מתלכדות זו עם זו); הנקודה O היא ראשית הצירים; הזווית ACB היא זווית ישרה; המרחק בין מוקד הפרבולה לבין נקודת החיתוך של הישר AB עם ציר ה- x שווה ל-1.5 יח'.

(א) מצאו את משוואת הפרבולה.
 (ב) נקודה A נמצאת במרחק של 2.5 יח' ממוקד הפרבולה. מצאו את שיעורי נקודה A .

דרך החשיבה ופתרון סעיף א'.

מה צריך למצוא בסעיף א' של הבעיה?

צריך למצוא את המשוואה של פרבולה קנונית אם ידוע כי

$$(1) \text{ מעגל מסוים חותך את הפרבולה בנקודות } A, B, C \text{ ו-} O,$$

$$(2) \text{ הנקודה } O \text{ היא ראשית מערכת הצירים,}$$

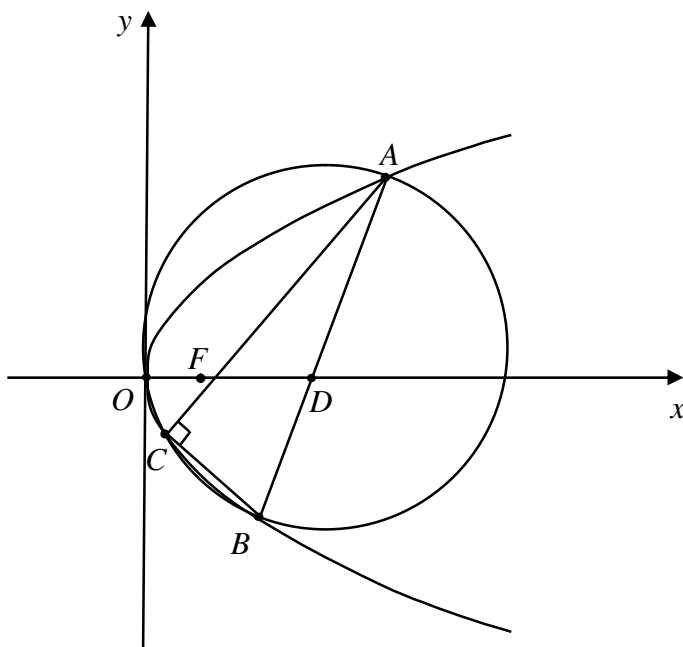
$$(3) \angle ACB = 90^\circ$$

$$(4) 1.5 \text{ יח' } FD = \text{(כאן } D \text{ היא נקודת חיתוך של הישר } AB \text{ עם ציר ה-} x \text{)}$$

(ונקודה F היא מוקד הפרבולה).

ראשית עלינו להיזכר כי פרבולה קנונית היא קו המיוצג על ידי המשוואה

$$(p > 0) \quad y^2 = 2px \quad (5)$$



מכאן מסיקים כי עלינו למצוא את הפרמטר p .

כיצד נמצא אותו?

ננסה להרכיב משוואה עם הנעלם p .

וכיצד אפשר להרכיב את משוואה זו? כיצד בכלל מרכיבים משוואות?

אחת הדרכים להרכבת משוואות היא להביע גודל ידוע באמצעות הנעלם.

הבה נשים לב לטענה (4); אם נצליח להביע את אורך הקטע FD באמצעות הפרמטר p ,

אז בהסתמך על טענה (4) נקבל את המשוואה שבעזרתה נוכל למצוא את הגודל של p .

מה אפשר לומר על קצות הקטע FD ?

אחד מקצות הקטע, נקודה F , הוא מוקד הפרבולה הנתונה, וידוע כי המוקד של פרבולה

שמשוואתה (5) נמצא בנקודה $(\frac{p}{2}, 0)$. במילים אחרות, ידוע כי

$$F(\frac{p}{2}, 0) \quad (6)$$

ומה אפשר לומר על הקצה השני של הקטע המדובר?

הקצה השני של הקטע, נקודה D , הוא נקודת החיתוך של הישר AB עם ציר ה- x . לכן מתקיים:

$$y_D = 0 \quad (7)$$

בהסתמך על שורות (6) ו-(7) מסיקים שאם נצליח להביע באמצעות p את השיעור

הראשון של נקודה D , נוכל להביע באמצעות פרמטר זה גם את אורך הקטע FD . נשים לב שמתוך הטענה שבה נאמר כי נקודה D היא נקודת החיתוך של הישר AB עם ציר ה- x נעזרנו עד כה רק בכך שהנקודה נמצאת על ציר ה- x . לא נעזרנו בכך שגם נאמר שנקודה D נמצאת על הישר AB . הבה ננסה להיעזר בכל מה שנאמר בטענה זו. ראשית ננסה להסיק כמה מסקנות לגבי הישר AB . עבור השיפוע m_{AB} של ישר זה מתקיים:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

נציב לפי השוויון האחרון בנוסחה הבאה למשוואת הישר AB :

$$y - y_A = m_{AB}(x - x_A)$$

נקבל את הנוסחה הבאה למשוואה זו:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot (x - x_A) \quad (8)$$

השיעורים של נקודה D מקיימים את המשוואה של הישר AB . לכן מתקיים:

$$y_D - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot (x_D - x_A) \quad (9)$$

(הצבנו את השיעורים x_D ו- y_D של נקודה D במשוואה (8)).

נציב בשוויון (9) לפי שוויון (7), ונקבל:

$$0 - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot (x_D - x_A)$$

לאחר שבשוויון האחרון נבודד את x_D נקבל:

$$x_D = \frac{y_B x_A - y_A x_B}{y_B - y_A} \quad (10)$$

קיבלנו את השוויון האחרון בלי להיעזר בטענות (1), (2) ו-(3). ננסה להסיק מסקנות גם מטענות אלו.

מטענה (1) נובע כי הנקודות A ו- B נמצאות על הפרבולה הנתונה. לכן שיעוריהן מקיימים את משוואתה (5), כלומר מתקיים:

$$y_A^2 = 2px_A \quad (11)$$

וגם

$$y_B^2 = 2px_B \quad (12)$$

שוויון (11) שקול לשוויון הבא:

$$x_A = \frac{y_A^2}{2p} \quad (13)$$

שוויון (12) שקול לשוויון הבא:

$$x_B = \frac{y_B^2}{2p}$$

נציב בשוויון (10) לפי שני השוויונים האחרונים, ונקבל:

$$x_D = \frac{y_B \cdot \frac{y_A^2}{2p} - y_A \cdot \frac{y_B^2}{2p}}{y_B - y_A}$$

שוויון זה שקול לשוויון הבא:

$$x_D = \frac{\frac{y_A y_B}{2p} \cdot (y_A - y_B)}{(y_B - y_A)}$$

השוויון האחרון שקול לשוויון הבא :

$$x_D = -\frac{y_A y_B}{2p} \quad (14)$$

עלינו לנסות להביע את הביטוי $y_A y_B$ באמצעות p .

במה מהנתון בבעיה עוד לא השתמשנו?

עוד לא השתמשנו בכך ש-

(15) הנקודות A, B, C ו- O נמצאות על המעגל הנתון.

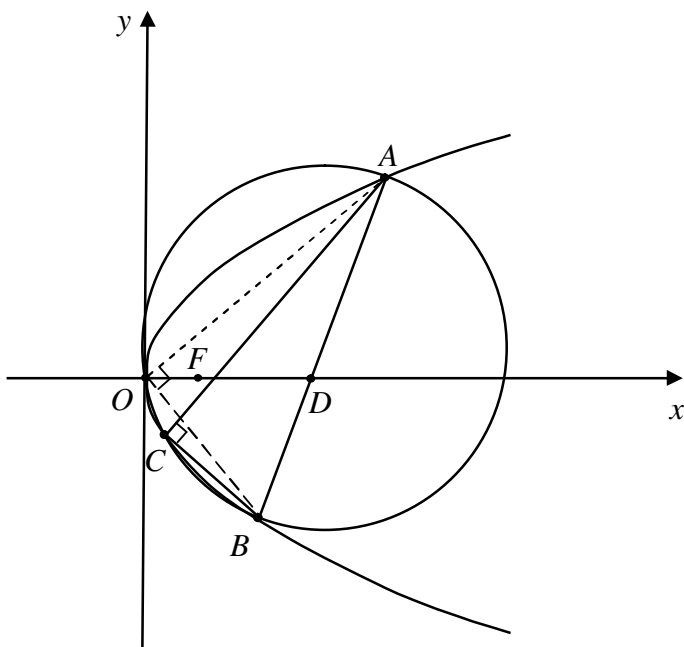
כמו כן לא השתמשנו בטענות (2) ו-(3). ננסה להיעזר בטענות אלו.

על סמך טענה (15) מסיקים כי

(16) הזווית ACB היא זווית היקפית במעגל הנתון.

וגם

(17) הזווית AOB היא זווית היקפית במעגל הנתון.



מטענות (3) ו-(16) נובע כי

(18) הקטע AB הוא קוטר במעגל הנתון.

(לפי המשפט הבא: הזווית ההיקפית הישרה נשענת על קוטר).

מטענות (17) ו-(18) נובע כי

$$\angle AOB = 90^\circ$$

(לפי המשפט הבא: הזווית ההיקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה).

על סמך השוויון האחרון מסיקים כי מתקיים:

$$m_{OA} \cdot m_{OB} = -1 \quad (19)$$

הנקודה O היא ראשית הצירים (זאת טענה (2)). לכן עבור השיפוע m_{OA} של הישר OA מתקיים:

$$m_{OA} = \frac{y_A - 0}{x_A - 0} = \frac{y_A}{x_A} \quad (20)$$

ועבור השיפוע m_{OB} של הישר OB מתקיים :

$$m_{OB} = \frac{y_B - 0}{x_B - 0} = \frac{y_B}{x_B} \quad (21)$$

נציב בשוויון (19) לפי מה שהתקבל בשורות (20) ו-(21), ונקבל :

$$\frac{y_A}{x_A} \cdot \frac{y_B}{x_B} = -1$$

השוויון האחרון שקול לשוויון הבא :

$$y_A y_B = -x_A x_B \quad (22)$$

כיצד עוד אפשר לקבל שוויון המקשר בין הביטויים $y_A y_B$ ו- $x_A x_B$?

אם נכפיל את שוויון (11) בשוויון (12) נקבל :

$$(y_A y_B)^2 = 4p^2 x_A x_B$$

נציב בשוויון האחרון לפי השוויון

$$x_A x_B = -y_A y_B$$

השקול לשוויון (22), ונקבל :

$$(y_A y_B)^2 = -4p^2 y_A y_B \quad (23)$$

נסמן את הביטוי $y_A y_B$ ב- t :

$$y_A y_B = t$$

נציב בשוויון (23) לפי השוויון האחרון, ונקבל :

$$t^2 = -4p^2 t$$

קיבלנו משוואה עם הנעלם t . היא שקולה למשוואה הבאה :

$$t(t + 4p^2) = 0$$

מכאן

$$t = 0 \quad \text{או} \quad t = -4p^2$$

לכן

$$y_A y_B = 0 \quad \text{או} \quad y_A y_B = -4p^2 \quad (24)$$

השוויון

$$y_A y_B = 0$$

מתקיים אך ורק אם מתקיים :

$$y_A = 0 \quad \text{או} \quad y_B = 0$$

אם מתקיים שוויון

$$, y_A = 0 \quad (25)$$

אז ממנו ומשוויון (11) נובע כי

$$x_A = 0$$

אם נקודה A מקיימת את שני השוויונים האחרונים, אז היא מתלכדת עם נקודה O .
הדבר סותר את הנתון בבעיה. לכן שוויון (25) לא מתקיים, כלומר מתקיים :

$$y_A \neq 0 \quad (26)$$

באופן דומה מקבלים כי גם שוויון

$$y_B = 0$$

לא מתקיים, כלומר מתקיים :

$$y_B \neq 0 \quad (27)$$

קבלנו כי שוויון $y_A y_B = 0$ לא מתקיים. מכאן ומשורה (24) נובע כי מתקיים :

$$y_A y_B = -4p^2 \quad (28)$$

נציב בשוויון (14) לפי השוויון האחרון, ונקבל:

$$x_D = -\frac{-4p^2}{2p} = 2p \quad (29)$$

הקטע FD מחבר את הנקודות $F(\frac{p}{2}, 0)$ ו- $D(2p, 0)$ (ראו שורות (6), (7) ו-(29)). לכן

עבור אורכו מתקיים:

$$FD = 2p - \frac{p}{2} = \frac{3}{2}p$$

מכאן ומטענה (4) נובע כי

$$\frac{3}{2}p = \frac{3}{2}$$

מכאן

$$p = 1 \quad (30)$$

נציב בנוסחה (5) על פי שוויון (30) ונקבל כי המשוואה של הפרבולה הנתונה היא

$$y^2 = 2x \quad (31)$$

הערה. נציין עכשיו כי את שוויון (10) קיבלנו למעשה בהנחה שמתקיים:

$$y_A \neq y_B \text{ וגם } x_A \neq x_B \quad (32)$$

הטענה שמתקיים $y_A \neq y_B$ נובעת משוויון (28). הרי מכפלה של מספר במספר שווה לו לא יכולה להיות שלילית.

נוכיח כי $x_A \neq x_B$ בדרך השלילה. נניח כי $x_A = x_B$.

מהשוויון האחרון נובע כי

$$\text{הישר } AB \text{ מאונך לציר ה- } x. \quad (33)$$

כעת ניעזר בכך ש-

$$\text{ציר ה- } x \text{ הוא ציר הסימטריה של הפרבולה הנתונה.} \quad (34)$$

מטענה (33), (34) ומכך שהנקודות A ו- B נמצאות על הפרבולה הנתונה נובע כי

$$\text{הנקודות } A \text{ ו- } B \text{ סימטריות אחת לשנייה ביחס לציר ה- } x. \quad (35)$$

מכאן

נקודה D (כלומר נקודת החיתוך של הישר AB עם ציר ה- x) היא אמצע הקטע AB .

לכן נקודה D היא מרכז המעגל שהקטע AB הוא קוטרו, כלומר

$$(36) \quad \text{נקודה } D \text{ היא מרכז המעגל הנתון}$$

(ראו טענה (18)).

כל ישר אשר עובר דרך מרכז מעגל הוא אחד מצירי הסימטריה של המעגל (זה נובע מהמשפט שלפיו: **האנך למיתר במעגל העובר דרך מרכז המעגל חוצה את המיתר**). מכאן ומטענה (36) נובע כי

$$(37) \quad \text{ציר ה-} x \text{ הוא אחד מצירי הסימטריה של המעגל הנתון.}$$

נסמן ב- E נקודה סימטרית לנקודה C ביחס לציר ה- x . ניזכר כי נקודה C היא אחת מארבע נקודות החיתוך של המעגל והפרבולה הנתונים. נקודה C לא נמצאת על ציר ה- x מכיוון שהפרבולה הנתונה חותכת את ציר זה רק בנקודה אחת – בנקודה O . לכן נקודה E לא מתלכדת עם נקודה C ועם נקודה O . נקודה E גם לא מתלכדת עם נקודה A מכיוון שאם נניח שהיא מתלכדת עם נקודה זו נקבל כי נקודה B היא נקודה סימטרית לנקודה E ביחס לציר ה- x (ראו טענה (35)), ולכן נקודות B ו- C מתלכדות זו עם זו. באופן דומה מגיעים למסקנה שנקודה E לא מתלכדת עם נקודה B . קיבלנו כי

$$(38) \quad \text{נקודה } E \text{ לא מתלכדת עם אף אחת מהנקודות } A, B, C \text{ ו-} O.$$

מטענות (34), (37) ומכך שנקודה C היא אחת מנקודות החיתוך של הפרבולה והמעגל הנתונים נובע כי

$$(39) \quad \begin{aligned} &\text{נקודה } E \text{ (כלומר נקודה הסימטרית לנקודה } C \text{ ביחס לציר ה-} x \text{) היא גם} \\ &\text{נקודת החיתוך של הפרבולה והמעגל הנתונים.} \end{aligned}$$

אכן, מטענה (34) ומכך שנקודה C נמצאת על הפרבולה הנתונה נובע כי גם הנקודה הסימטרית לנקודה C ביחס לציר ה- x נמצאת על הפרבולה הנתונה, ואילו מטענה (37) ומכך שנקודה C נמצאת על המעגל הנתון נובע כי גם הנקודה הסימטרית לנקודה C ביחס

לציר ה- x נמצאת על המעגל הנתון; הנקודה אשר נמצאת על הפרבולה הנתונה וגם על המעגל הנתון היא נקודת החיתוך של שני הקווים.
לפי הנתון בבעיה

$$(40) \quad \text{הפרבולה והמעגל הנתונים נחתכים בנקודות } A, B, C \text{ ו-} O.$$

שתי הטענות (38) ו-(39) סותרות את טענה (40). מעבר לכך שנקודה E לא נכללת באוסף נקודות החיתוך הנזכרות בטענה (40), לפרבולה ולמעגל כלל לא יכולות להיות יותר מארבע נקודות חיתוך (הוכיחו זאת בעצמכם בתור תרגיל). הגענו לידי סתירה מפני שהנחנו כי $x_A = x_B$. לכן $x_A \neq x_B$.

דרך החשיבה ופתרון סעיף ב'.

מה צריך למצוא בסעיף ב' של הבעיה?

צריך למצוא את השיעורים של נקודה A .

מה נתון?

נוסף על הנתונים הקודמים, כעת גם נתון כי

$$(41) \quad AF = 2.5 \text{ יח'}$$

נוכל למצוא את שיעור ה- x של נקודה A בעזרת השוויון הבא, המקשר בין השיעור הראשון של הנקודה $Q(x_Q, y_Q)$ הנמצאת על פרבולה קנונית $y^2 = px$ לבין המרחק r בין הנקודה לבין מוקד הפרבולה:

$$(42) \quad r = x_Q + \frac{p}{2}$$

אם מתקשים לזכור נוסחה זו, אפשר לקבלה בקלות אם נזכרים בהגדרה הבאה של פרבולה: **פרבולה היא מקום גיאומטרי של כל הנקודות במישור שמרחקן מנקודה מסוימת, שנקראת מוקד הפרבולה, שווה למרחקן מישור מסוים, שנקרא מדריך הפרבולה.**

עבור פרבולה $y^2 = 2px$ המדריך הוא הישר $x = -\frac{p}{2}$. המרחק בין נקודה Q לישר זה

שווה ל- $x_Q + \frac{p}{2}$. מכאן ומהגדרה של פרבולה נובע כי שוויון (42) מתקיים.

מכאן נובע כי:

$$AF = x_A + \frac{p}{2}$$

נציב בשוויון האחרון לפי שוויונים (30) ו-(41), ונקבל:

$$2.5 = x_A + \frac{1}{2}$$

מכאן

$$x_A = 2 \quad (43)$$

שיעורי נקודה A מקיימים את המשוואה של הפרבולה הנתונה, כלומר מתקיים:

$$y_A^2 = 2x_A$$

(ראו שורה (31)).

נציב במשוואה האחרונה לפי שורה (43), ונקבל:

$$y_A^2 = 2 \cdot 2$$

מכאן

$$y_A = \pm 2$$

תשובה: $A(2, 2)$ או $A(2, -2)$.

תרגיל. מצאו את משוואת המעגל הנתון בבעיה אשר פתרנו בפרק זה.

19. כבוד האליפסה

איני יכול להתפאר בידע רב באסטרונומיה. אולי אתה, הקורא שורות אלו, בקי בה יותר ממני. בכל זאת, גם אני יודע משהו על כוכבים. קראתי כמה ספרים. פעם אחת, בשיחת חולין, סיפרתי לאיש לא משכיל במיוחד את מה שקראתי, והוא אמר לי: "אתה משקר!"

בעיה. נתונות נקודות $A(-4,0)$ ו- $B(4,0)$. מצאו את השיעורים של נקודה C המקיימת את התנאים הבאים: (א) היקף המשולש ABC שווה ל-18 יח'; (ב) שטח המשולש ABC שווה ל-12 יח' ריבועיות.

דרך החשיבה ופתרון.

מה צריך למצוא?

צריך למצוא את השיעורים של נקודה C המקיימת שני תנאים.

מה הם התנאים?

תנאי ראשון:

$$(1) \quad \text{עבור הנקודות } A(-4,0) \text{ ו- } B(4,0) \text{ היקף המשולש } ABC \text{ שווה ל-18 יח' .}$$

תנאי שני:

$$(2) \quad \text{עבור הנקודות } A(-4,0) \text{ ו- } B(4,0) \text{ שטח המשולש } ABC \text{ שווה ל-12 יח' ריבועיות.}$$

נפתור את הבעיה בשיטה של שני מקומות גיאומטריים: נמצא את המקום הגיאומטרי

של כל הנקודות המקיימות את תנאי (1); נמצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות

המקיימות את תנאי (2); ולאחר מכן נמצא את השיעורים של הנקודה C כשיעורים של

נקודה משותפת לשני מקומות גיאומטריים אלו.

נפעל לפי תוכנית זו לפתרון הבעיה. ראשית נמצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות

המקיימות את תנאי (1).

אורך הצלע AB במשולש ABC הוא 8 יח'. לכן תנאי (1) שקול לתנאי הבא:

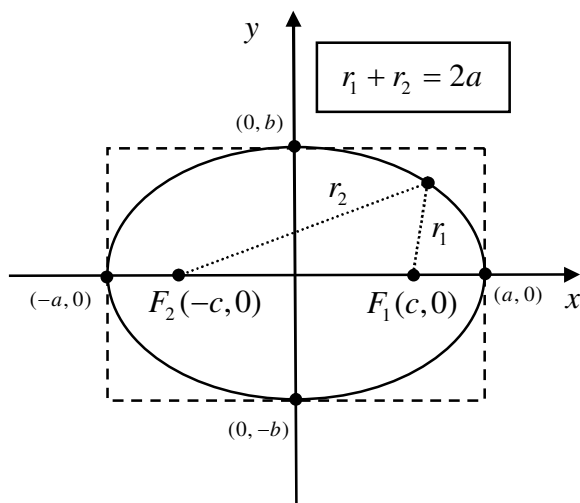
(3) סכום המרחקים בין נקודה C לנקודות $A(-4,0)$ ו- $B(4,0)$ שווה ל-10 יח'.

הבה ניזכר כי המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שסכום מרחקיהן משתי נקודות קבועות שווה למספר קבוע נקרא אליפסה. המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שסכום מרחקיהן מנקודות $F_1(c,0)$ ו- $F_2(-c,0)$ שווה ל- $2a$ ($0 \leq c < a$) הוא אליפסה שמשוואתה

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

כאן b הוא מספר חיובי המקיים את השוויון הבא:

$$b^2 = a^2 - c^2 \quad (5)$$



אליפסה זו נקראת אליפסה קנונית. משוויון (5) נובע כי מתקיים:

$$a \geq b$$

הגרף של האליפסה הקנונית מוצג בציר משמאל.

על סמך הנאמר לעיל על אודות האליפסה הקנונית אפשר להסיק כי המקום הגיאומטרי של כל הנקודות C המקיימות את תנאי (3) הוא אליפסה קנונית המקיימת את התנאים הבאים:

$$2a = 10 \quad (6)$$

$$c = 4 \quad (7)$$

משוויון (6) נובע כי

$$a = 5 \quad (8)$$

נציב בשוויון (5) לפי שוויונים (7) ו-(8), ונקבל:

$$b^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \quad (9)$$

מכאן

$$b = 3$$

נציב במשוואה (4) לפי שורות (8) ו-(9), ונקבל כי המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המקיימות את תנאי (3) הוא אליפסה שמשוואתה

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (10)$$

ומהו המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המקיימות את תנאי (2)?
 במטרה לענות על שאלה זו נשאל את עצמנו: האם כבר פתרנו בעיה הדומה לבעיה זו?
 כן, בפרק 13 עבור הנקודות $A(-1, 2)$ ו- $B(3, 5)$ מצאנו את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות C המקיימות את התנאי הבא: שטח המשולש ABC שווה ל-10 יח"ר.
 קראו את פרק 13 שוב, ומצאו בעצמכם את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המקיימות את תנאי (2). מקום גיאומטרי זה הוא איחוד הישרים $y = 3$ ו- $y = -3$.
 למקום הגיאומטרי של כל הנקודות המקיימות את תנאי (1), כלומר לאליפסה (10), ולמקום הגיאומטרי של כל הנקודות המקיימות את תנאי (2), כלומר לאיחוד הישרים

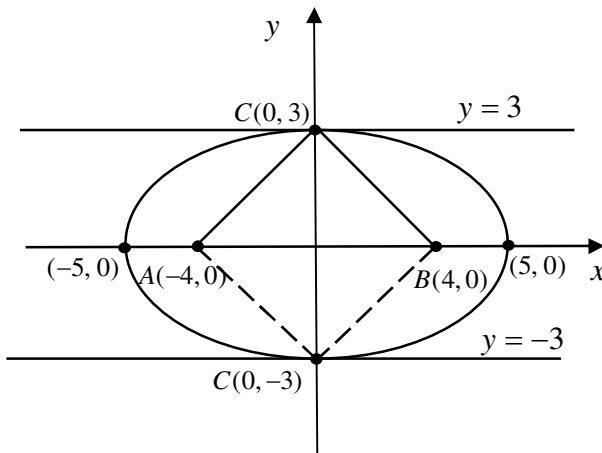
$y = 3$ ו- $y = -3$, יש שתי

נקודות משותפות:

הנקודות $(0, 3)$ ו- $(0, -3)$.

לכן התשובה לבעיה היא:

$C(0, 3)$ או $C(0, -3)$.



20. פגישה שנייה עם האליפסה

איני חולק על הטענה כי בורא העולם מחלק כישרונות באופן לא שווה בין ילדים קטנים, אך כפי שנוכחתי לדעת, אין זו חלוקה סופית. גורלו של הכישרון מלידה, אם לא משתמשים בו ולא מטפחים אותו, הוא כגורלה של מכונית יקרה שקיבלת במתנה, אך לא נסעת בה: חלודה תכרסם בה. אפשר להשוות כישרון זה לצמח אשר היה זקוק למים, אך לא קיבלם והתייבש. מי שניחן ולו בקמצוץ של כישרון בתחום כלשהו, אך לא נכנע ועשה כל מאמץ כדי לפתחו, יופתע לגלות בבוא העת כי כישרונו התפתח לממדים אדירים והוא אף נושא פרי.

חוק חלוקת הכישרונות המכריע הוא: בסוף כל אחד מקבל כפי שהשקיע.

בעיה. באליפסה שמשוואתה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a < b$) חסום משולש ABC . הצלע BC

מתלכדת עם הציר הקטן של האליפסה. אורכי הצלעות של המשולש הנתון הם: 25, 28 ו-17 יח'. נקודה A נמצאת ברביע השני, ומתקיים: $\angle BAC > \angle ACB > \angle ABC$. מצאו את משוואת האליפסה.

דרך החשיבה ופתרון.

מה צריך למצוא?

צריך למצוא משוואה של אליפסה מסוימת.

מה נתון?

נתון שהאליפסה מיוצגת על ידי משוואה מן הצורה

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

ומתקיים:

$$a < b \quad (2)$$

על סמך משוואה (1) מסיקים כי אנו מתבקשים למצוא את הריבועים של חוצי הצירים a ו- b של האליפסה המדוברת, ולהציב אותם במשוואה (1).

מה עוד נתון?

עוד נתון כי

$$\text{באליפסה המדוברת חסום משולש } ABC, \quad (3)$$

$$\text{הצלע } BC \text{ מתלכדת עם הציר הקטן של האליפסה,} \quad (4)$$

$$\text{אורכי הצלעות של המשולש הנתון הם: } 28, 25 \text{ ו- } 17 \text{ יח',} \quad (5)$$

$$\angle BAC > \angle ACB > \angle ABC \quad (6)$$

$$\text{נקודה } A \text{ נמצאת ברביע השני.} \quad (7)$$

טענה (3) שקולה לטענה הבאה:

$$\text{הנקודות } A, B \text{ ו- } C \text{ נמצאות על האליפסה המדוברת.} \quad (8)$$

כעת נתמקד בטענה (4), ונשאל את עצמנו: מהו הציר קטן של האליפסה המיוצגת על ידי משוואה (1) אשר מקיימת את תנאי (2)?

$$(9) \quad \text{הציר הקטן של אליפסה זו הוא הקטע המחבר את הנקודות } (-a, 0) \text{ ו- } (a, 0)$$

(גם לאורך הקטע קוראים הציר הקטן של האליפסה).

מטענות (4) ו-(9) נובע כי

$$(10) \quad \text{אחת מהנקודות } B \text{ ו- } C \text{ מתלכדת עם הנקודה } (-a, 0) \text{ והשנייה עם הנקודה } (a, 0).$$

מכאן

$$BC = 2a \quad (11)$$

כעת נתבונן בטענות (5) ו-(6). מטענות אלו ומהאי-שוויונים $28 > 25 > 17$ נובע (לפי

משפט: במשולש מול זווית גדולה יותר נמצאת צלע גדולה יותר) כי

$$BC = 28 \quad (12)$$

$$AB = 25 \quad (13)$$

$$AC = 17 \quad (14)$$

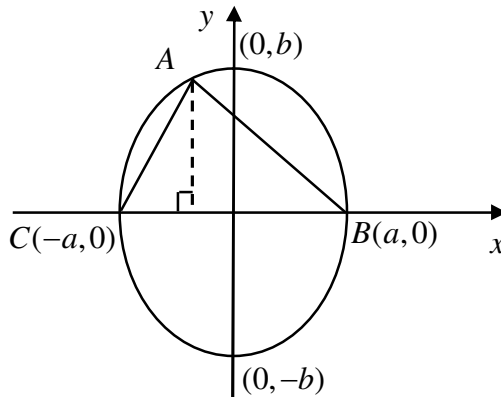
על סמך טענה (7) מסיקים כי אורך ההיטל על ציר ה- x של הקטע המחבר את נקודה A עם הנקודה $(a, 0)$ גדול יותר מאשר אורך ההיטל על ציר ה- x של הקטע המחבר את נקודה A עם הנקודה $(-a, 0)$. מכאן

(15) אורך הקטע המחבר את נקודה A עם הנקודה $(a, 0)$ גדול יותר מאורך הקטע המחבר את נקודה A עם הנקודה $(-a, 0)$.

מטענות (10), (13), (14) ו-(15) נובע כי

(16) נקודה B מתלכדת עם הנקודה $(a, 0)$,

(17) נקודה C מתלכדת עם הנקודה $(-a, 0)$.



משוויונים (11) ו-(12) נובע (לפי כלל המעבר) כי מתקיים:

$$2a = 28$$

מכאן

$$a = 14 \quad (18)$$

$$a^2 = 196 \quad (19)$$

נציב במשוואה (1) לפי שוויון (19), ונקבל כי משוואתה של האליפסה המדוברת היא

$$\frac{x^2}{196} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (20)$$

נותר רק למצוא את הערך של b^2 ולהציב אותו במשוואה האחרונה. ננסה להרכיב משוואה עם נעלם b .

אילו היו ידועים לנו שיעורי הנקודה A , היינו יכולים להציבם במשוואה (20) ולקבל משוואה שבאמצעותה היינו מוצאים את b^2 .

הבה נפתור את הבעיה שבה נדרש למצוא את השיעורים x_A ו- y_A של הנקודה A הנזכרת לעיל.

זאת בעיה עם שני נעלמים. ננסה להרכיב מערכת של שתי משוואות עם הנעלמים x_A ו- y_A . ניעזר בכך שנקודה A מקיימת את השוויונים (13) ו-(14) ובנוסחה לחישוב מרחק בין שתי נקודות, ונקבל את שני השוויונים הבאים:

$$\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = 25 \quad (21)$$

$$\sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = 17 \quad (22)$$

מטענות (16), (17) ו-(18) נובע כי

$$x_B = 14, \quad y_B = 0 \quad (23)$$

$$x_C = -14, \quad y_C = 0 \quad (24)$$

נציב בשוויון (21) לפי שורה (23), ובשוויון (22) לפי שורה (24), ונקבל את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} \sqrt{(x_A - 14)^2 + y_A^2} = 25 \\ \sqrt{(x_A + 14)^2 + y_A^2} = 17 \end{cases}$$

כדי לפתור מערכת זו צריך להעלות את כל משוואתה בריבוע ולחסר מהמשוואה השנייה של המערכת אשר תתקבל את משוואה הראשונה. כשפותרים את מערכת המשוואות האחרונה מקבלים כי

$$\begin{cases} x_A = -6 \\ y_A = 15 \end{cases} \quad \text{או} \quad \begin{cases} x_A = -6 \\ y_A = -15 \end{cases}$$

מכאן ומטענה (7) נובע כי

$$A(-6,15)$$

נציב את השיעורים של נקודה A במשוואה (20), ונקבל :

$$\frac{(-6)^2}{196} + \frac{15^2}{b^2} = 1$$

מכאן

$$b^2 = 275.625 \quad (25)$$

נציב במשוואה (20) לפי שורה (25), ונקבל את התשובה הבאה לסעיף א' של הבעיה :

$$\frac{x^2}{196} + \frac{y^2}{275.625} = 1$$

מש"ל.

21. פגישה שלישית עם האליפסה

אין לנו אומץ לדברים רבים לא מפני שהם קשים, הם קשים כי אין לנו אומץ בשבילם.

(סנקה הצעיר)

בעיה. נתונה אליפסה קנונית. הישר $x = 2$ חותך את האליפסה בנקודות הנמצאות במרחק של 8.8 יח' מהמוקד הימני של האליפסה ובמרחק של 11.2 יח' מהמוקד השמאלי שלה. מצאו את המשוואה של האליפסה.

דרך החשיבה ופתרון.

מה צריך למצוא?

צריך למצוא את המשוואה של האליפסה הקנונית המקיימת את התנאי הבא:

הישר $x = 2$ חותך את האליפסה בנקודות הנמצאות במרחק של

8.8 יח' מהמוקד הימני של האליפסה ובמרחק של 11.2 יח' (1)

מהמוקד השמאלי שלה

קודם כל נשאל את עצמנו: מהי אליפסה קנונית?

אליפסה קנונית היא מקום גיאומטרי של כל הנקודות במישור שסכום מרחקיהן מנקודות $F_1(c, 0)$ ו- $F_2(-c, 0)$ ($c \geq 0$) הוא מספר קבוע. לאחר שמסמנים את מספר קבוע זה ב- $2a$ מקבלים את המשוואה הבאה של האליפסה הקנונית:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

עבור הפרמטרים a ו- b במשוואה זו מתקיים:

$$b^2 + c^2 = a^2 \quad (3)$$

(לפרמטרים a ו- b קוראים חוצי הצירים של האליפסה הקנונית).

לנקודות $F_1(c, 0)$ ו- $F_2(-c, 0)$ קוראים מוקדי האליפסה הקנונית. נקודה $F_1(c, 0)$ היא

המוקד הימני של האליפסה, ונקודה $F_2(-c, 0)$ היא המוקד השמאלי שלה.

על סמך משוואה (2) מסיקים כי אנו מתבקשים למצוא את הריבועים של חוצי הצירים

a ו- b של האליפסה הנתונה בבעיה ולהציב אותם במשוואה זו.

לעתים כדי למצוא את חוצי הצירים a ו- b של אליפסה קנונית מרכיבים שתי משוואות

עם הנעלמים a ו- b , אך לא תמיד אפשר להסתפק בשני נעלמים אלו. לעתים כדי למצוא

את a ו- b צריך להרכיב ולפתור מערכת של שלוש משוואות עם הנעלמים a , b ו- c .

ננסה להרכיב מערכת של שלוש משוואות עם הנעלמים a , b ו- c . כבר יש בידינו משוואה

אחת: משוואה (3) (כעת אנחנו מתייחסים לשוויון (3) כאל משוואה עם הנעלמים a , b ו- c).

עלינו להרכיב עוד שתי משוואות עם הנעלמים אלו.

הבה נתבונן בטענה (1). נשאל את עצמנו מה ידוע על מרחקיה של נקודה הנמצאת על

אליפסה קנונית ממוקדי האליפסה?

נסמן את המרחק של נקודה (x, y) הנמצאת על אליפסה (2) מהמוקד הימני $F_1(c, 0)$

שלה ב- r_1 ואת המרחק של הנקודה מהמוקד השמאלי $F_2(-c, 0)$ של האליפסה ב- r_2 ;

ניזכר כי אליפסה (2) היא מקום גיאומטרי של כל הנקודות במישור שסכום מרחקיהן

מנקודות $F_1(c, 0)$ ו- $F_2(-c, 0)$ הוא $2a$; לכן מתקיים:

$$r_1 + r_2 = 2a \quad (4)$$

עבור נקודה (x, y) הנמצאת על אליפסה (2) גם מתקיים:

$$r_1 = a - \frac{c}{a}x \quad (5)$$

ו-

$$r_2 = a + \frac{c}{a}x \quad (6)$$

לפי טענה (1) עבור כל אחת מנקודות החיתוך של הישר $x = 2$ עם האליפסה שאת

משוואתה עלינו למצוא מתקיים:

$$r_1 = 8.8 \quad (7)$$

$$r_2 = 11.2 \quad (8)$$

מובן ששיעורה הראשון שכל אחת משתי נקודות אלו שווה ל- 2 :

$$.x = 2 \quad (9)$$

כאשר נציב בשוויון (4) לפי שוויונים (7) ו-(8) נקבל :

$$8.8 + 11.2 = 2a$$

מכאן

$$a = 10 \quad (10)$$

כעת ברשותנו שתי משוואות עם הנעלמים a , b ו- c : משוואות (3) ו-(10). עלינו להרכיב עוד משוואה אחת עם נעלמים אלו.

נציב בשוויון (5) לפי שוויונים (7) ו-(9), ונקבל :

$$8.8 = a - \frac{c}{a} \cdot 2 \quad (11)$$

כעת ברשותנו שלוש משוואות עם הנעלמים a , b ו- c : משוואות (3), (10) ו-(11). אפשר לפתור את המערכת המורכבת ממשוואות אלו, אך נעשה דבר אחר : נציב בשוויון (6) לפי שוויונים (8) ו-(9). כך נקבל :

$$11.2 = a + \frac{c}{a} \cdot 2$$

קיבלנו משוואה נוספת עם הנעלמים a , b ו- c . נחסר ממשוואה זו את משוואה (11), ונקבל :

$$.4 \cdot \frac{c}{a} = 2.4$$

נחלק את המשוואה האחרונה ב- 4 ונכפיל ב- a , ונקבל :

$$c = 0.6a \quad (12)$$

נפתור את המערכת

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = a^2 \\ a = 10 \\ c = 0.6a \end{cases}$$

המורכבת ממשוואות (3), (10) ו-(12).

נציב במשוואה שלישית של מערכת זו לפי המשוואה השנייה שלה, ונקבל את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = a^2 \\ a = 10 \\ c = 6 \end{cases}$$

כאשר נציב במשוואה הראשונה של המערכת האחרונה לפי שתי המשוואות האחרונות שלה נקבל את המשוואה הבאה:

$$b^2 + 6^2 = 10^2$$

מכאן

$$b = 8 \quad (13)$$

נציב בנוסחה (2) לפי השוויונים (10) ו-(13), ונקבל כי המשוואה של האליפסה הנתונה היא

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$$

מש"ל.

22. דואָט של אליפסה והיפרבולה

אפלטון ניסח הגדרה שהייתה בעלת הצלחה רבה: "אדם הוא בעל חיים ללא נוצות ועם שתי רגליים." דיוגנס¹ מרט נוצות מן תרנגול, הביא אותו לאפלטון לבית הספר והכריז: "הנה האדם של אפלטון". לאחר מכן הוסף להגדרה: "ועם ציפורניים רחבות".

(דיוגנס לארטיס)

בעיה. נתונות נקודות $A(-5,0)$, $B(-3,0)$, $C(3,0)$ ו- $D(5,0)$. מצאו, עם דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה, את השיעורים של נקודה P המקיימת את התנאים הבאים: (א) המרחק בין נקודה P לבין נקודה A גדול ב-6 יח' מהמרחק בין נקודה זו לבין נקודה D ; (ב) היקף המשולש PCB שווה ל-16 יח'.

דרך החשיבה ופתרון.

מה צריך למצוא?

צריך למצוא, עם דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה, את השיעורים של נקודה P המקיימת שני תנאים.

מה הם התנאים?

תנאי ראשון:

$$\text{המרחק בין נקודה } P \text{ לבין נקודה } A(-5,0) \text{ גדול ב-6 יח' } \quad (1)$$

$$\text{מהמרחק בין נקודה זו לבין נקודה } D(5,0)$$

תנאי שני:

$$\text{עבור הנקודות } B(-3,0) \text{ ו- } C(3,0) \text{ היקף המשולש } PCB \text{ שווה ל-16 יחידות.} \quad (2)$$

¹ הכוונה לפילוסוף דיוגנס מסינופ.

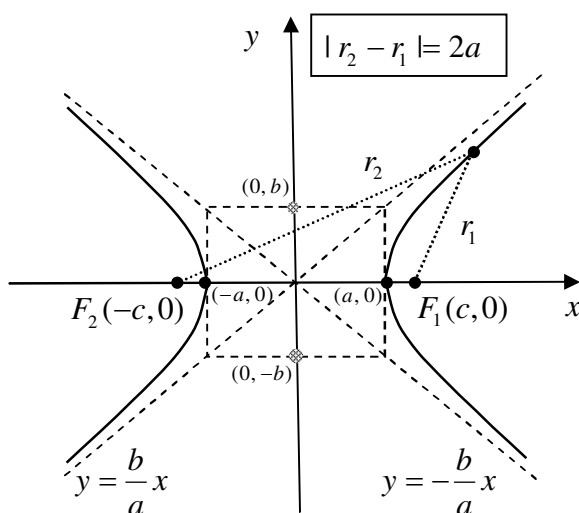
נפתור את הבעיה בשיטה של שני מקומות גיאומטריים: נמצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המקיימות את תנאי (1); נמצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המקיימות את תנאי (2); לאחר מכן נמצא את השיעורים של הנקודה P כשיעורים של נקודה משותפת לשני מקומות גיאומטריים אלו. נפעל לפי תוכנית זו לפתרון הבעיה. ראשית נמצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המקיימות את תנאי (1).

נזכור כי המקום גיאומטרי של כל הנקודות שהפרש מרחקיהן משתי נקודות קבועות שווה למספר קבוע נקרא היפרבולה². לשתי הנקודות הקבועות הנ"ל קוראים מוקדי ההיפרבולה. המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שהפרש מרחקיהן משתי נקודות $F_1(c, 0)$ ו- $F_2(-c, 0)$ שווה ל- $2a$ ($0 < a < c$) הוא היפרבולה שמשוואתה

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

כאן b הוא מספר חיובי המקיים את השוויון הבא:

$$b^2 = c^2 - a^2 \quad (4)$$



היפרבולה זו נקראת היפרבולה קנונית. בציור משמאל נמצא גרף של היפרבולה קנונית. המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מנקודה $F_2(-c, 0)$ גדול מ- $2a$ ממרחקן מנקודה $F_1(c, 0)$ הוא הענף הימני של ההיפרבולה האחרונה.

על סמך הנאמר לעיל על אודות היפרבולה קנונית אפשר להסיק כי המקום הגיאומטרי של כל הנקודות

P המקיימות את תנאי (1) הוא הענף הימני של היפרבולה קנונית המקיימת את התנאים הבאים:

² כאשר מחשבים את הפרש המרחקים המדוברים מחסרים מהמספר הגדול מבין השניים את המספר הקטן יותר, או מוציאים את הערך המוחלט של ההפרש.

$$2a = 6 \quad (5)$$

$$c = 5 \quad (6)$$

משוויון (5) נובע כי :

$$a = 3 \quad (7)$$

נציב בשוויון (4) לפי שוויונים (6) ו-(7), ונקבל :

$$b^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \quad (8)$$

מכאן

$$b = 4$$

נציב בנוסחה (3) לפי שורות (6) ו-(8), ונקבל כי המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המקיימות את תנאי (1) הוא הענף הימני של היפרבולה שמשוואתה

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad (9)$$

ומהו המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המקיימות את תנאי (2)!

כדי לענות על שאלה זו נשאל את עצמנו : האם פתרנו בעבר בעיה שבה נדרש למצוא את

המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המקיימות תנאי דומה לתנאי (2)?

כן, בפרק 19 מצאנו עבור הנקודות $A(-4, 0)$ ו- $B(4, 0)$ את המקום הגיאומטרי של כל

הנקודות C המקיימות את התנאי הבא : היקף המשולש ABC שווה ל-18 יח'. קיבלנו כי מקום גיאומטרי זה הוא אליפסה שמשוואתה

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

קראו שוב את פרק 19 והראו בדרך דומה כי המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור

המקיימות את תנאי (2) הוא אליפסה שמשוואתה

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad (10)$$

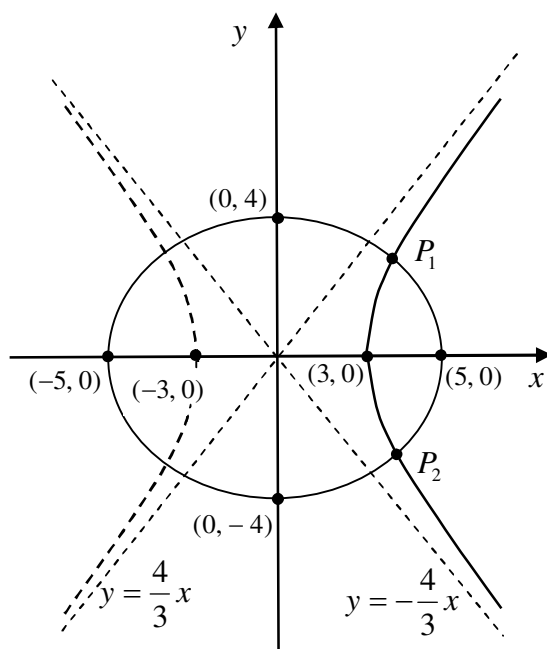
כעת אפשר להסיק כי נקודה P מקיימת את תנאים (1) ו-(2) אך ורק אם היא נקודת החיתוך של הענף הימני של ההיפרבולה המיוצגת על ידי משוואה (9) עם האליפסה המיוצגת על ידי משוואה (10). לכן שיעורי הנקודה P המקיימת את תנאים (1) ו-(2) הם פתרונות המקיימים את התנאי $x > 0$ של המערכת המורכבת ממשוואות (9) ו-(10). כשמוצאים פתרונות אלו עם הדיוק

הנדרש בבעיה מקבלים כי

$$\text{או } P(3.638, 2.744)$$

$$. P(3.638, -2.744)$$

מש"ל.



23. סיפורן של שתי אסימפטוטות

אחרי רדפו 30 כלבים. 7 מהם היו לבנים, 8 היו בצבע אפור ושאר הכלבים היו שחורים.

השאלה: באיזו רגל ננשכתי?

(אנטון צ'קוב)

בעיה. ישר אשר עובר דרך המוקד השמאלי של היפרבולה קנונית ומאונך לאחת האסימפטוטות שלה, חותך את האסימפטוטה השנייה בנקודה $A(-\frac{80}{7}, \frac{60}{7})$. מצאו את משוואת ההיפרבולה.

דרך החשיבה ופתרון.

לעתים קרובות צריך לנסח בעיה בדרך אחרת כדי לפתור אותה. את הבעיה הנוכחית אפשר לנסח גם באופן הבא:

נתונה היפרבולה קנונית; הנקודה $A(-\frac{80}{7}, \frac{60}{7})$ נמצאת על אחת האסימפטוטות של ההיפרבולה. הישר העובר דרך נקודה A ודרך המוקד השמאלי של ההיפרבולה מאונך לאסימפטוטה השנייה. מצאו את משוואת ההיפרבולה.

עשינו את הצעד הראשון לכיוון פתרון הבעיה. נמשיך מכאן. עלינו למצוא את המשוואה של היפרבולה קנונית מסוימת. לכן עלינו קודם כל להיזכר כי היפרבולה קנונית היא קו המיוצג על ידי המשוואה הבאה:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

על סמך משוואה (1) מסיקים כי אנו בעצם מתבקשים למצוא את הריבועים של חוצי הצירים a ו- b של ההיפרבולה הנתונה בבעיה ולהציב אותם במשוואה זו.

לעתים כדי למצוא את חוצי הצירים a ו- b של היפרבולה קנונית מרכיבים שתי משוואות עם הנעלמים a ו- b , אך לא תמיד אפשר להסתפק בשני נעלמים אלו. לעתים כדי למצוא a ו- b צריך להרכיב ולפתור מערכת של שלוש משוואות עם הנעלמים a , b ו- c . אחת המשוואות במערכת זו היא:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (2)$$

(או משוואה השקולה לה). אל תשכחו ש- a , b ו- c צריכים להיות גדולים מ-0. לפי הנתון (ראו ניסוח שני של הבעיה) מתקיים:

$$(3) \quad \text{הנקודה } A\left(-\frac{80}{7}, \frac{60}{7}\right) \text{ נמצאת על אחת האסימפטוטות של ההיפרבולה.}$$

כעת עלינו להיזכר כי לכל היפרבולה יש שתי אסימפטוטות. אסימפטוטות של ההיפרבולה המיוצגת על ידי משוואה (1) הם הישרים $\ell_1: y = \frac{b}{a}x$ ו- $\ell_2: y = -\frac{b}{a}x$. אם שיעור ה- x של נקודה הנמצאת על הישר $\ell_1: y = \frac{b}{a}x$ הוא מספר שלילי, אז גם שיעור ה- y של נקודה זו הוא מספר שלילי (מכיוון שמתקיים: $b > 0, a > 0$), אך עבור שיעורי הנקודה $A\left(-\frac{80}{7}, \frac{60}{7}\right)$ מתקיים:

$$x_A < 0, \quad y_A > 0$$

לכן

$$\text{נקודה } A \text{ לא יכולה להימצא על אסימפטוטה } \ell_1: y = \frac{b}{a}x.$$

מכאן ומטענה (3) נובע כי:

$$(4) \quad \text{הנקודה } A\left(-\frac{80}{7}, \frac{60}{7}\right) \text{ נמצאת על הישר } \ell_2: y = -\frac{b}{a}x.$$

(נציין שלכל נקודה P הנמצאת על הישר $\ell_2: y = -\frac{b}{a}x$ ומקיימת את התנאי: $x_P < 0$,

מתקיים: $y_P > 0$).

טענה (4) מתקיימת אך ורק אם שיעורי נקודה A מקיימים את המשוואה $y = -\frac{b}{a}x$,

כלומר אך ורק אם מתקיים:

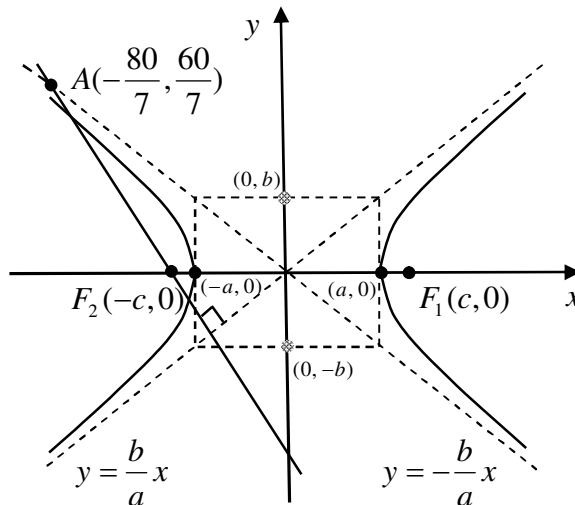
$$\frac{60}{7} = \frac{b}{a} \cdot \left(-\frac{80}{7}\right) \quad (5)$$

כעת ברשותנו שתי משוואות עם הנעלמים a, b, c : משוואות (2) ו-(5). עלינו להרכיב עוד משוואה אחת עם נעלמים אלו, אך לפני כן נציין כי משוואה (5) שקולה למשוואה הבאה:

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{3} \quad (6)$$

במטרה להרכיב את המשוואה השלישית עם הנעלמים a, b, c , נשאל את עצמנו: במה מהנתון בבעיה עוד לא השתמשנו? לא השתמשנו בכך שלפי הנתון (בניסוח השני של הבעיה)

הישר העובר דרך הנקודה $A(-\frac{80}{7}, \frac{60}{7})$ ודרך המוקד השמאלי של ההיפרבולה מאונך לאסימפטוטה שעליה נקודה A לא נמצאת. (7)



על סמך הנאמר לעיל על אסימפטוטות של היפרבולה קונית מסיקים כי מטענות (4) ו- (7) נובע ש-

$$\begin{aligned} &\text{הישר העובר דרך הנקודה } A\left(-\frac{80}{7}, \frac{60}{7}\right) \text{ ודרך המוקד השמאלי של} \\ &\text{ההיפרבולה הנתונה מאונך לישר } \ell_1 : y = \frac{b}{a}x. \end{aligned} \quad (8)$$

כעת עלינו להיזכר כי המוקדים של ההיפרבולה המיוצגת על ידי משוואה (1) הם הנקודות $F_1(c, 0)$ ו- $F_2(-c, 0)$ (הוא המספר החיובי המקיים את תנאי (2)). המוקד השמאלי של ההיפרבולה הוא הנקודה $F_2(-c, 0)$. עכשיו אפשר לנסח את טענה (8) בצורה הבאה:

$$\begin{aligned} &\text{הישר העובר דרך הנקודות } A\left(-\frac{80}{7}, \frac{60}{7}\right) \text{ ו- } F_2(-c, 0) \text{ מאונך לישר} \\ &\ell_1 : y = \frac{b}{a}x. \end{aligned} \quad (9)$$

טענה זו מתקיימת אך ורק אם עבור הנקודות A ו- F_2 הנזכרות בה מתקיים:

$$m_{AF_2} = -\frac{1}{m_{\ell_1}} = -\frac{a}{b} \quad (10)$$

כעת ניעזר בנוסחה

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

לחישוב השיפוע של הישר העובר דרך נקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) . נקבל:

$$m_{AF_2} = \frac{y_{F_2} - y_A}{x_{F_2} - x_A} = \frac{\frac{60}{7} - 0}{-\frac{80}{7} + c} = \frac{60}{7c - 80} \quad (11)$$

הצלחנו להביע את השיפוע m_{AF_2} של הישר AF_2 באמצעות a, b ו- c בשתי דרכים שונות. כעת על סמך שורות (10) ו-(11) וכלל המעבר נוכל להסיק כי טענה (9) מתקיימת אך ורק אם מתקיים:

$$-\frac{a}{b} = \frac{60}{7c-80} \quad (12)$$

עכשיו עלינו להתבונן במערכת

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ \frac{a}{b} = \frac{4}{3} \\ -\frac{a}{b} = \frac{60}{7c-80} \end{cases} \quad (13)$$

המורכבת ממשוואות (2), (6) ו-(12). מערכת זו שקולה למערכת הבאה:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ \frac{a}{b} = \frac{4}{3} \\ 0 = \frac{4}{3} + \frac{60}{7c-80} \end{cases} \quad (14)$$

(חיברנו אל המשוואה השלישית של מערכת (13) את המשוואה השנייה שלה).
כאשר נפתור את המשוואה השלישית של מערכת המשוואות האחרונה נקבל:

$$c = 5$$

לכן מערכת משוואות (14) שקולה למערכת הבאה:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ \frac{a}{b} = \frac{4}{3} \\ c = 5 \end{cases}$$

נציב במשוואה הראשונה של מערכת המשוואות האחרונה לפי המשוואה השלישית ונכפיל את המשוואה השנייה ב- b , ונקבל:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \\ a = \frac{4}{3}b \\ c = 5 \end{cases} \quad (15)$$

נציב במשוואה הראשונה של מערכת (15) לפי המשוואה השנייה שלה, ונקבל את המשוואה הריבועית הבאה:

$$\left(\frac{4}{3}b\right)^2 + b^2 = 25$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה הבאה:

$$b^2 = 9$$

מכאן

$$b = 3 \quad (16)$$

נציב במשוואה השנייה של מערכת (15) לפי שורה (16), ונקבל:

$$a = 4$$

מכאן

$$a^2 = 16$$

מצאנו את ריבועי חוצי הצירים של ההיפרבולה הנתונה. נציב אותם במשוואה (1), ונקבל את המשוואה שהתבקשנו למצוא:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

מש"ל.

24. כמו שירו של רועה צאן

בני אדם שרים ברגעי שמחה וברגעי עצב, אך גם ברגעי שעמום. אינני יודע כיצד זה היום, אך בעבר כשרכבו רועי הצאן הקזחים על סוסיהם בערבה הם שרו לאורך כל הדרך. אילו שירים הם שרו? הפשוטים ביותר – מה שאני רואה, על זה אני שר. "אני רואה עץ", שר רועה הצאן הקזחי, "יש צל תחתיו. כשאגיע אל העץ אנוח". קיימות לא מעט בעיות שדרך פתרון מזכירה לי את השירים של אותם רועי צאן.

בעיה. נתונות נקודות $A(-2,0)$ ו- $B(2,0)$. מצאו את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מנקודה B גדול פי 3 ממרחקן מנקודה A .

דרך החשיבה ופתרון.

מה צריך למצוא?

צריך למצוא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור שמרחקן מנקודה $B(2,0)$ גדול פי 3 ממרחקן מנקודה $A(-2,0)$.

נסמן נקודה שרירותית השייכת למקום הגיאומטרי המדובר ב- P . הרי אם למשהו או למישהו אין שם או כינוי, קשה, ולעתים קרובות אפילו בלתי אפשרי, לדבר עליו בצורה ברורה.

אילו תנאים חייבת לקיים נקודה P ?

תנאי אחד ויחיד:

המרחק בין נקודה P לבין נקודה $B(2,0)$ צריך להיות גדול פי 3 מהמרחק בין

P לבין נקודה $A(-2,0)$.

במילים אחרות,

$$BP \text{ צריך להיות גדול פי שלושה מאורך הקטע } AP \quad (1)$$

נרשום את טענה (1) בצורה מתמטית:

$$BP = 3AP \quad (2)$$

ברשותנו שוויון המקשר בין אורך הקטע AP לבין אורך הקטע BP ; כיצד אפשר להביע את אורכי הקטעים באמצעות השיעורים של קצותיהם?
לפי הנוסחה לחישוב מרחק בין שתי נקודות מתקיים:

$$AP = \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} \quad (3)$$

-1

$$BP = \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_A)^2} \quad (4)$$

נציב בשוויון (3) את השיעורים של נקודה A , ונקבל:

$$AP = \sqrt{(x_P + 2)^2 + y_P^2} \quad (5)$$

נציב בשוויון (4) את השיעורים של נקודה B , ונקבל:

$$BP = \sqrt{(x_P - 2)^2 + y_P^2} \quad (6)$$

אם נתבונן בשוויונים (2), (5) ו-(6), לא יהיה קשה לנחש כי צריך להציב בשוויון (2) לפי שוויונים (5) ו-(6). נעשה כך, ונקבל:

$$\sqrt{(x_P - 2)^2 + y_P^2} = 3\sqrt{(x_P + 2)^2 + y_P^2} \quad (7)$$

קיבלנו כי נקודה P במישור נמצאת במקום הגיאומטרי המדובר אך ורק אם שיעוריה מקיימים את שוויון (7). מכאן נובע כי המשוואה הבאה היא המשוואה של מקום גיאומטרי זה:

$$\sqrt{(x - 2)^2 + y^2} = 3\sqrt{(x + 2)^2 + y^2} \quad (8)$$

במשוואה האחרונה אנחנו רואים שורשים ריבועיים. כיצד אפשר להיפטר מהם?
צריך להעלות את שני האגפים של המשוואה האחרונה בריבוע. נעשה כך, ונקבל:

$$(x - 2)^2 + y^2 = 9[(x + 2)^2 + y^2]$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה (8) ולמשוואה הבאה:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 9(x^2 + 4x + 4 + y^2)$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה הבאה :

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 9x^2 + 36x + 36 + 9y^2$$

משוואה זו שקולה למשוואה הבאה :

$$8x^2 + 40x + 8y^2 = -32$$

נחלק את המשוואה האחרונה ב-8, ונקבל :

$$x^2 + 5x + y^2 = -4$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה הבאה :

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 2.5 + (2.5)^2 + y^2 = -4 + (2.5)^2$$

(במשוואה הקודמת החלפנו את הביטוי $5x$ בביטוי $2 \cdot x \cdot 2.5$, ששווה לו, והוספנו לשני האגפים של המשוואה את $(2.5)^2$).

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה הבאה :

$$(x + 2.5)^2 + y^2 = 2.25 \quad (9)$$

משוואה (9) שקולה למשוואה (8), שתי המשוואות מייצגות את אותו קו. על סמך משוואה (9) של המקום הגיאומטרי המדובר אפשר לקבוע כי המקום הגיאומטרי הוא מעגל שמרכזו בנקודה $(-2.5, 0)$ ורדיוסו 1.5 יח'.

25. הדרך המובילה למשוואת המקום הגיאומטרי

"נראה לעין – זה מה שאיש לא רואה עד שמישהו מתאר אותו במילים פשוטות," כתב הפילוסוף, הסופר, המשורר והצייר הנודע ג'ובראן חליל ג'ובראן. כשתלמידיי כבר ידעו דבר מה אודות מקומות גיאומטריים, אך לפני שסיפרתי להם את מה שתקראו בפרק זה, אחת מתלמידותיי ביקשה שאעזור לה לפתור בעיה קשה (לא רק מבחינתה) למציאת המשוואה של מקום גיאומטרי. פתרתי את הבעיה לפי האלגוריתם המתואר להלן.

"כמה זה קל! יכולתי בעצמי להגיע לאלגוריתם," אמרה התלמידה כשסיימתי.

"קל? כן, את צודקת." שפת האמת פשוטה, 'אמר אפלטון. יכולת להגיע אל האלגוריתם בעצמך? אם כן, כיצד זה שאיש ממחברי הספרים בתחום, לא פרסם עד עתה את מה שאני הסברתי לך. אך במחשבה שנייה, אולי את צודקת."

בעיה. נתונים מלבנים. אורכי הצלעות של כל אחד מהמלבנים הם 4 יח' ו-3 יח'. בכל אחד מהמלבנים ישנם שני קודקודים לא סמוכים שאחד מהם נמצא על ישר $y = 2x$ והשני על ישר $y = 4x$. הוכיחו כי משוואת המקום הגיאומטרי של נקודות מפגש האלכסונים של המלבנים היא $292x^2 - 216xy + 40y^2 = 25$.

דרך החשיבה ופתרון.

מה צריך להוכיח?

צריך להוכיח כי

משוואת המקום הגיאומטרי של נקודות מפגש האלכסונים במלבנים

$$\text{המקיימים כמה תנאים היא } 292x^2 - 216xy + 40y^2 = 25.$$

במילים אחרות, אנחנו מתבקשים למצוא את משוואת המקום הגיאומטרי של נקודות מפגש אלכסונים במלבנים המקיימים כמה תנאים, וידועה לנו התוצאה שאליה אנו צריכים להגיע.

אילו תנאים מקיימים המלבנים?

המלבנים מקיימים את התנאים הבאים:

(1) אורכי הצלעות של כל אחד מהמלבנים הם 4 יח' ו-3 יח' ;

(2) בכל אחד מהמלבנים ישנם שני קודקודים לא סמוכים שאחד מהם נמצא על ישר $y = 2x$ והשני על ישר $y = 4x$.

נתבונן במלבן שרירותי המקיים את תנאים (1) ו-(2); נסמן את נקודת המפגש של אלכסונו ב- P , את שיעור ה- x של נקודה P – ב- x_1 , ואת השיעור ה- y של נקודה זו ב- y_1 .¹

עלינו להרכיב משוואה המקשרת את הנעלמים x_1 ו- y_1 . הבה נעשה זאת לפי השלבים הבאים:

שלב א': נוסף על נקודה $P(x_1, y_1)$ נתבונן גם בנקודות $(x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_k, y_k)$, שמיקומן קובע באופן חד-משמעי את מיקומה של נקודה $P(x_1, y_1)$. הקבוצה של נקודות נוספות אלו לא חייבת להיות מינימלית.

שלב ב': נרכיב מערכת של $2k - 1$ משוואות עם $2k$ הנעלמים הבאים:

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k$$

(ייתכן שלא יהיה גבול ברור בין שלבים א' ו-ב'. ייתכן שנמצא כמה נקודות המשפיעות על מיקומה של נקודה P ונרכיב כמה משוואות שבהן הנעלמים הם השיעורים של נקודות אלו והשיעורים של נקודה P . לאחר מכן נמצא עוד נקודות המשפיעות על מיקומה של נקודה P ונרכיב משוואות נוספות).

שלב ג' (שלב אחרון): על סמך המערכת של $2k - 1$ משוואות אשר הורכבו בשלב ב' (נקרא לה מערכת (**)) נקבל משוואה אך ורק עם הנעלמים x_1 ו- y_1 .²

¹ בעתיד במקום לומר: "נסמן את נקודת המפגש של אלכסונו ב- P , את שיעור ה- x של הנקודה P נסמן ב- x_1 ואת השיעור ה- y של נקודה זו נסמן ב- y_1 ", נגיד בקיצור: "נסמן את נקודת המפגש של אלכסונו ב- $P(x_1, y_1)$ ".

² אם המיקום של נקודה שרירותית P השייכת למקום הגיאומטרי שאת משוואתו צריך למצוא נקבע חד-משמעית על ידי מיקומן של $k - 1$ נקודות $(x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_k, y_k)$, ונתונים ערכים של m

לאחר שתתקבל משוואה המקשרת את הנעלמים x_1 ו- y_1 , יש להחליף בה את x_1 ב- x ואת y_1 ב- y . המשוואה האחרונה היא משוואת המקום הגיאומטרי הנדרשת.

כיצד נבצע את שלב ג'?

קודם כל נקבל (אם יתאפשר לנו) מערכת משוואות פשוטה יותר השקולה למערכת (*) של $2k-1$ משוואות אשר הורכבו בשלב ב' (נקרא למערכת המשוואות החדשה מערכת (**)). לשם כך ניעזר בפעולות הבאות: החלפת מקום המשוואות, הכפלת (או חילוק) משוואה במספר שונה מ-0, חיבור של משוואה המוכפלת בביטוי כלשהו אל משוואה אחרת השייכת למערכת זו, הצבה במשוואה אחת של מערכת לפי משוואות אחרות. לפעמים מופיע גם צורך להעלות משוואה כלשהי בריבוע. במקרים כאלו יש להיזהר מקבלת פתרונות מיותרים.

אם לאחר ביצוע הפעולות המתוארות לעיל לא נקבל בקלות את המשוואה המקשרת בין הנעלמים x_1 ו- y_1 , נמשיך את מאמצינו בדרך הבאה:

נבחר ב- $2k-2$ משוואות מתוך $2k-1$ משוואות אשר כלולות במערכת (**), ועל סמך משוואות אלו ננסה להביע את הנעלמים $x_2, y_2, \dots, x_k, y_k$ באמצעות הנעלמים x_1 ו- y_1 . אם בחירתנו ב- $2k-2$ משוואות תהיה נכונה, אז כנראה אפשר יהיה להביע את הנעלמים $x_2, y_2, \dots, x_k, y_k$ באמצעות הנעלמים x_1 ו- y_1 , מכיוון שאם נתבונן במערכת המורכבת ממשוואות אלו ונתייחס אל x_1 ו- y_1 כאל פרמטרים, ולא כאל נעלמים, תהיה זו מערכת של $2k-2$ משוואות עם $2k-2$ נעלמים.

אם לאחר שנבצע את כל מה שנאמר לעיל נקבל כי

$$x_2 = f_1(x_1, y_1), y_2 = g_1(x_1, y_1), \dots, x_k = f_{k-1}(x_1, y_1), y_k = g_{k-1}(x_1, y_1) \quad (3)$$

מתוך $2k-2$ הגדלים $x_2, y_2, x_3, y_3, \dots, x_k, y_k$, אז כבר מתחילת פתרון הבעיה אפשר להתרכז בניסיון להרכיב מערכת של $2k-m-1$ משוואות עם $2k-m$ נעלמים, ולא להתבונן כלל במערכת $2k-1$ משוואות עם $2k$ נעלמים (ראו פרק הבא).

והמשוואה אשר כלולה במערכת (**), אך לא נמצאת בין $2k - 2$ המשוואות אשר נבחרו היא

$$F(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k) = 0 \quad (4)$$

אז לאחר שנציב במשוואה האחרונה לפי המשוואות הרשומות בשורה (3) נקבל:

$$F(x_1, f_1(x_1, y_1), g_1(x_1, y_1), \dots, f_{k-1}(x_1, y_1), g_{k-1}(x_1, y_1)) = 0$$

על סמך משוואה זו נוכל להסיק כי המשוואה של המקום הגיאומטרי הנדרשת היא

$$F(x, f_1(x, y), g_1(x, y), \dots, f_{k-1}(x, y), g_{k-1}(x, y)) = 0$$

נציין שאם חלק מהנעלמים $x_2, y_2, \dots, x_k, y_k$ לא משתתפים במשוואה (4), אז אין צורך להביע את נעלמים אלו באמצעות הנעלמים x_1 ו- y_1 (אם, כמובן, אפשר להביע את שאר הנעלמים באמצעות x_1 ו- y_1 בלי לעשות זאת עבור הנעלמים שאינם מופיעים במשוואה (4)). מכאן נובע כי לא תמיד יש צורך לבחור בדיוק $2k - 2$ מתוך $2k - 1$ משוואות אשר כלולות במערכת (**), לפעמים מתוך $2k - 1$ אלו אפשר לבחור מספר קטן יותר של משוואות.

נתחיל לפעול לפי תוכנית זו לפתרון הבעיה.

לפי הסימון, נקודה $P(x_1, y_1)$ היא נקודת מפגש האלכסונים במלבן שרירותי המקיים

את תנאים (1) ו-(2). בשיעורים של אילו עוד נקודות עלינו להתבונן?

בבעיה נזכרים שני קודקודים של המלבן. אחד מהם נמצא על הישר $y = 2x$ והשני על

הישר $y = 4x$. שני קודקודים אלה נמצאים אחד מול השני. נסמן את קודקוד המלבן

הנמצא על הישר $y = 2x$ ב- $A(x_2, y_2)$ ואת הקודקוד הנמצא על הישר $y = 4x$ ב-

$$C(x_3, y_3)$$

נקודה $A(x_2, y_2)$ נמצאת על הישר $y = 2x$ אך ורק אם מתקיים:

$$y_2 = 2x_2 \quad (5)$$

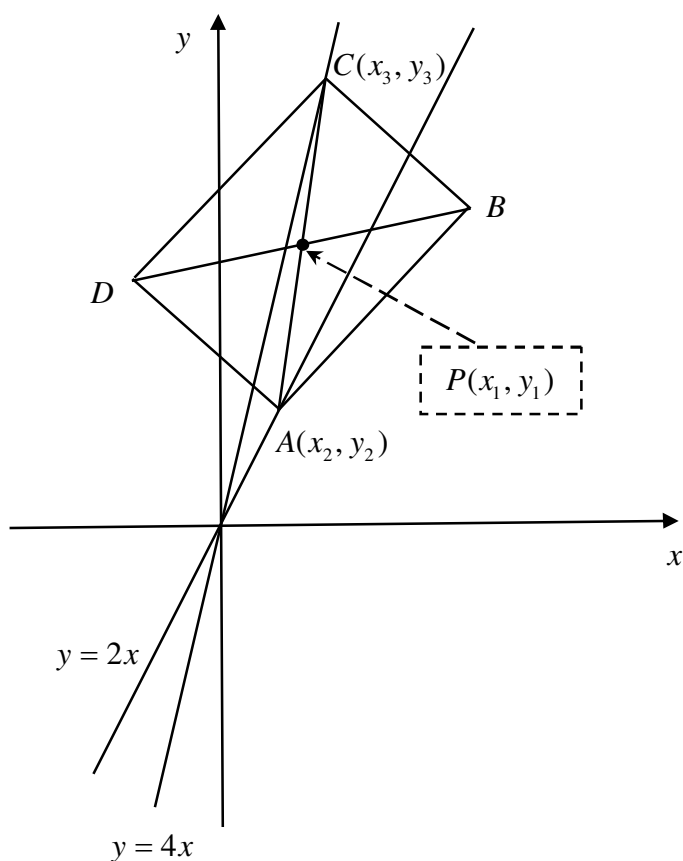
נקודה $C(x_3, y_3)$ נמצאת על הישר $y = 4x$ אך ורק אם מתקיים:

$$y_3 = 4x_3 \quad (6)$$

אלכסונים במלבן חוצים זה את זה. לכן נקודה P היא אמצע האלכסון AC במלבן המדובר. מכאן

$$x_1 = \frac{x_2 + x_3}{2} \quad (7)$$

$$y_1 = \frac{y_2 + y_3}{2} \quad (8)$$



כעת ברשותנו ארבע משוואות עם הנעלמים $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$: משוואות (5), (6), (7) ו-

(8). כמה משוואות עלינו להרכיב עוד?

אנו מרכיבים משוואות עבור שישה נעלמים. עלינו להרכיב עוד משוואה אחת עם הנעלמים הנ"ל כדי שתהיה ברשותנו מערכת של חמש משוואות עם שישה נעלמים.

במה מהנתון בבעיה עוד לא השתמשנו?

לא השתמשנו בכך שלפי הנתון

(9) אורכי הצלעות של המלבן המדובר הם 4 יח' ו- 3 יח'.

נסמן את אחד הקודקודים של המלבן המדובר הסמוכים לקודקוד A (ולקודקוד C) ב-

B ואת השני ב- D .

לפי טענה (9) מתקיים :

$$AB = 4 \text{ יח'}, BC = 3 \text{ יח'} \quad (10)$$

או

$$AB = 3 \text{ יח'}, BC = 4 \text{ יח'} \quad (11)$$

אפשר לחשב את אורך האלכסון AC של המלבן $ABCD$. לפי משפט פיתגורס מתקיים

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \quad (12)$$

אם נציב בשוויון האחרון לפי שורה (10) או לפי שורה (11), נקבל :

$$AC^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \text{ יח"ר}$$

מכאן

$$AC = 5 \text{ יח'} \quad (13)$$

כעת נחשב את אורך הקטע AC בדרך אחרת: ניעזר בנוסחה לחישוב מרחק בין שתי

נקודות במישור. לפי נוסחה זו מתקיים :

$$AC = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} \quad (14)$$

משורות (13) ו-(14) נובע כי

$$\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} = 5 \quad (15)$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה הבאה:

$$(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 = 25 \quad (16)$$

שימו לב כי על מנת להרכיב את משוואה (16) חישבנו את אורך הקטע AC בשתי דרכים שונות. **חישוב גודל כלשהו בשתי דרכים שונות הוא דרך חשובה להרכבת משוואות.**

גם נציין כי עבור כל זוג נקודות $A(x_2, y_2)$ ו- $C(x_3, y_3)$ המקיימות את משוואה (16) קיים מלבן $ABCD$ שאחת משתי צלעותיו הסמוכות שווה ל-4 יח' והשנייה ל-3 יח'. כעת נוכל להתבונן במערכת הבאה של חמש משוואות עם שישה נעלמים:

$$\begin{cases} y_2 = 2x_2 \\ y_3 = 4x_3 \\ x_1 = \frac{x_2 + x_3}{2} \\ y_1 = \frac{y_2 + y_3}{2} \\ (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 = 25 \end{cases} \quad (17)$$

ננסה להביע בהסתמך על ארבע המשוואות הראשונות של מערכת זו את הנעלמים x_2 ,

y_2 , x_3 ו- y_3 באמצעות הנעלמים x_1 ו- y_1 .

נציב במשוואות הרביעית של מערכת (17) לפי שתי המשוואות הראשונות שלה, ונקבל:

$$\begin{cases} y_2 = 2x_2 \\ y_3 = 4x_3 \\ x_1 = \frac{x_2 + x_3}{2} \\ y_1 = \frac{2x_2 + 4x_3}{2} \\ (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 = 25 \end{cases} \quad (18)$$

נתבונן במערכת

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x_2 + x_3}{2} \\ y_1 = \frac{2x_2 + 4x_3}{2} \end{cases} \quad (19)$$

המורכבת מהמשוואות השלישית והרביעית של מערכת משוואות (18). מערכת המשוואות האחרונה שקולה למערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 2x_1 \\ 2x_2 + 4x_3 = 2y_1 \end{cases} \quad (20)$$

בהסתמך על מערכת המשוואות האחרונה נביע את x_2 ואת x_3 באמצעות x_1 ו- y_1 . נחסר מהמשוואה השנייה של מערכת (20) את המשוואה הראשונה המוכפלת ב-2, ונקבל:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 2x_1 \\ 2x_3 = 2y_1 - 4x_1 \end{cases}$$

נחלק את המשוואה השנייה של המערכת האחרונה ב-2. נקבל:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 2x_1 \\ x_3 = y_1 - 2x_1 \end{cases}$$

נציב במשוואה הראשונה של מערכת המשוואות האחרונה לפי המשוואה השנייה, ונקבל:

$$\begin{cases} x_2 + y_1 - 2x_1 = 2x_1 \\ x_3 = y_1 - 2x_1 \end{cases}$$

מערכת המשוואות האחרונה שקולה למערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} x_2 = 4x_1 - y_1 \\ x_3 = y_1 - 2x_1 \end{cases} \quad (21)$$

מערכת משוואות (21) שקולה למערכת משוואות (19). לכן מערכת משוואות (18) שקולה למערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} y_2 = 2x_2 \\ y_3 = 4x_3 \\ x_2 = 4x_1 - y_1 \\ x_3 = y_1 - 2x_1 \\ (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 = 25 \end{cases}$$

נציב במשוואה הראשונה של המערכת האחרונה לפי המשוואה השלישית שלה ובמשוואה השנייה – לפי המשוואה הרביעית, נקבל את המערכת הבאה :

$$\begin{cases} y_2 = 2(4x_1 - y_1) \\ y_3 = 4(y_1 - 2x_1) \\ x_2 = 4x_1 - y_1 \\ x_3 = y_1 - 2x_1 \\ (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 = 25 \end{cases}$$

מערכת זו שקולה למערכת הבאה :

$$\begin{cases} y_2 = 8x_1 - 2y_1 \\ y_3 = 4y_1 - 8x_1 \\ x_2 = 4x_1 - y_1 \\ x_3 = y_1 - 2x_1 \\ (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 = 25 \end{cases}$$

נציב במשוואה החמישית של המערכת האחרונה לפי ארבע המשוואות הראשונות שלה, ונקבל את המשוואה הבאה :

$$[4x_1 - y_1 - (y_1 - 2x_1)]^2 + [8x_1 - 2y_1 - (4y_1 - 8x_1)]^2 = 25$$

משוואה זו שקולה למשוואה הבאה :

$$(6x_1 - 2y_1)^2 + (16x_1 - 6y_1)^2 = 25$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה הבאה :

$$292x_1^2 - 216x_1y_1 + 40y_1^2 = 25$$

נחליף במשוואה האחרונה את x_1 ב- x ואת y_1 ב- y , ונקבל את המשוואה הבאה של המקום הגיאומטרי המדובר:

$$292x^2 - 216xy + 40y^2 = 25$$

מש"ל.

26. מקום אחר – אותה שיטה

השכלה היא מה שנשאר לאחר ששכחנו את כל מה שלימדו אותנו.

(ג'ורג' סאויל, המרקוז הראשון מהליפקס)

לעתים קרובות אנשים מתבלבלים בין המושג "מדע" למושג "ידע", וזו טעות גדולה. מדע הוא לא רק ידע, אלא גם תודעה. כלומר, היכולת להשתמש בידע כפי שצריך.

(וסילי קלוצ'בסקי)

זמן קצר לאחר תום הלימודים בתיכון ובאוניברסיטה, שוכחים רוב האנשים את רוב הנוסחאות שלמדו שם. הדברים החשובים ביותר שנותרים בזיכרונם לאחר שנות לימודים רבות הם מושגי יסוד בתחומים שלמדו, רעיונות עיקריים, דרכי חשיבה ו"כוח המוח". ואם לא הבינו את הרעיונות העיקריים ולא למדו כיצד לחשוב, אלא רק שיננו נוסחאות - מה נשאר להם בסופו של דבר מלבד תעודות ואולי כמה מושגים ועובדות? את הבעיה אשר נפתור בפרק הנוכחי אפשר לפתור מהר יותר אם נעזרים (בלי להוכיח אותן) בנוסחאות המאפשרות לחשב את השיעורים של נקודת מפגש התיכונים במשולש, אם ידועים השיעורים של קודקודיו. לא נבחר בדרך קלה זו. נוכיח את הנוסחאות בעצמנו תוך כדי פתרון הבעיה.

בעיה. נתונים משולשים ישרי זווית. בכל אחד מהמשולשים הקודקוד של הזווית הישרה נמצא בנקודה $(2, 4)$, הקודקודים של אחת משתי הזוויות החדות נמצא על ישר $x = -2$, ואילו הקודקוד של הזווית החדה השנייה נמצא על ישר $y = 2$. מצאו את משוואת המקום הגיאומטרי של נקודות המפגש של התיכונים במשולשים אלו.

בהסתמך על הנתון בבעיה ועל הסימון שנעשה, נוכל מיד לרשום כי

$$x_A = 2, y_A = 4, x_B = -2, y_C = 2 \quad (1)$$

ו-

$$\angle BAC = 90^\circ \quad (2)$$

ישנן הנוסחאות הבאות, המאפשרות להביע את השיעורים של נקודה P באמצעות השיעורים של קודקודי המשולש המדובר:

$$x_P = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad (3)$$

$$y_P = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \quad (4)$$

נקבל אותן בעצמנו. במטרה לקבל את נוסחאות (3) ו-(4) נשאל את עצמנו: האם קיים משפט גיאומטרי שנוכל להיעזר בו לשם כך?

קיים משפט שלפיו: **כל שני תיכונים במשולש מחלקים זה את זה לשני קטעים כך שהקטע הקרוב לקודקוד גדול פי שניים מהקטע הקרוב לצלע.**

נסמן את אמצע הצלע BC ב- M ונתבונן בתיכון AM . לפי המשפט הנ"ל על נקודת המפגש של תיכונים במשולש מתקיים:

$$\frac{AP}{PM} = 2 \quad (5)$$

ננסה להיעזר במשפט שלפיו: **אם נקודה P נמצאת על הקטע AM ומתקיים:**

$$\frac{AP}{PM} = \frac{m}{n} = \lambda, \text{ אז מתקיים:}$$

$$x_P = \frac{mx_M + nx_A}{m+n}, \quad x_P = \frac{\lambda x_M + x_A}{\lambda+1}$$

$$y_P = \frac{my_M + ny_A}{m+n}, \quad y_P = \frac{\lambda y_M + y_A}{\lambda+1}$$

על סמך טענה (5) אפשר להסיק כי $\lambda = 2, n = 1, m = 2$. לכן מתקיים:

$$x_P = \frac{2x_M + x_A}{2+1} \quad (6)$$

$$y_P = \frac{2y_M + x_A}{2+1} \quad (7)$$

נקודה M היא אמצע הקטע BC . מכאן

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \quad (8)$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} \quad (9)$$

נציב בשוויון (6) לפי שוויון (8), ונקבל:

$$x_P = \frac{2 \cdot \frac{x_B + x_C}{2} + x_A}{3}$$

השוויון האחרון שקול לשוויון (3).

כעת נציב בשוויון (7) לפי שוויון (9), ונקבל:

$$y_P = \frac{2 \cdot \frac{y_B + y_C}{2} + y_A}{3}$$

השוויון האחרון שקול לשוויון (4).

הוכחנו את שוויונים (3) ו-(4). כעת נוכל להתבונן במערכת המשוואות

$$\begin{cases} x_P = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_P = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ x_A = 2 \\ y_A = 4 \\ x_B = -2 \\ y_C = 2 \end{cases}$$

(ראו שורות (1), (3) ו-(4)). זאת מערכת של 6 משוואות עם 8 נעלמים (הנעלמים הם: x_A ,

$x_B, x_C, y_A, y_B, y_C, y_P$). עלינו להרכיב עוד משוואה אחת כדי שתהיה ברשותנו

מערכת של 7 משוואות עם 8 נעלמים.

במטרה להרכיב עוד משוואה אחת נשאל את עצמנו: במה מהנתון בבעיה עוד לא

השתמשנו?

לא השתמשנו בטענה (2).

אילו מסקנות אפשר להסיק על סמך טענה (2)?

על סמך טענה (2) אפשר להסיק כי

משולש ABC הוא משולש ישר זווית, היתר במשולש ישר זווית זה היא הצלע

BC והניצבים הם הצלעות AB ו- AC .

מכאן לפי משפט פיתגורס נובע כי מתקיים:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad (10)$$

קיבלנו שאם שוויון (2) מתקיים, גם שוויון (10) מתקיים. נוסיף כי ההפך גם נכון: לפי

משפט הפוך למשפט פיתגורס, אם שוויון (10) מתקיים, גם שוויון (2) מתקיים.¹

בעזרת הנוסחה לחישוב מרחק בין שתי נקודות נקבל:

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}$$

¹ וזה בתנאי שאף שתי נקודות מבין נקודות A, B ו- C לא מתלכדות זו עם זו.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$$

נציב בשוויון (10) לפי שלושת השוויונים האחרונים, ונקבל:

$$(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 \quad (11)$$

הרכבנו את המשוואה השביעית עם הנעלמים הנ"ל.

אפשר להרכיב את המשוואה השביעית בדרך אחרת. אפשר לפרש את שוויון (2) בצורה הבאה:

הישר AB מאונך לישר AC .

מהו התנאי המספיק וההכרחי לכך ששני ישרים יהיו מאונכים זה לזה?

לשאלה זו אפשר לתת את התשובות הבאות:

תשובה א': הישר ℓ_1 מאונך לישר ℓ_2 אך ורק אם וקטור הכיוון של ישר ℓ_1 (כלומר וקטור שונה מ- $\underline{0} = (0,0)$) נמצא על הישר ℓ_1 או מקביל לו) מאונך לווקטור הכיוון של הישר ℓ_2 .

תשובה ב': הישרים $\ell_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ו- $\ell_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ מאונכים זה לזה אך ורק אם מתקיים:

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0$$

(האגף השמאלי של השוויון האחרון הוא מכפלה סקלרית של הווקטורים (a_1, b_1) ו- (a_2, b_2) ;

(a_2, b_2) ;

הווקטור (a_1, b_1) מאונך לישר $\ell_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$, הווקטור (a_2, b_2) מאונך לישר

$\ell_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$; הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 מאונכים זה לזה אך ורק הווקטורים (a_1, b_1)

ו- (a_2, b_2) מאונכים זה לזה; מכאן הווקטורים (a_1, b_1) ו- (a_2, b_2) מאונכים זה לזה אך

ורק אם המכפלה הסקלרית שלהם שווה ל-0).

תשובה ג': הישרים $\ell_1: y = m_1x + n_1$ ו- $\ell_2: y = m_2x + n_2$ מאונכים זה לזה אך ורק אם מתקיים:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

ניעזר בשתיים משלוש דרכים אלו לקבלת משוואה שביעית עם הנעלמים הנ"ל.

ראשית ניעזר בכך הישר AB מאונך לישר AC אך ורק אם הווקטור $\overrightarrow{AB}$ מאונך לווקטור $\overrightarrow{AC}$.

נמצא את שני הווקטורים:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

$$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A)$$

הווקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{AC}$ מאונכים זה לזה אך ורק אם מכפלה סקלרית שלהם שווה ל-0, כלומר אך ורק אם מתקיים:

$$(x_B - x_A)(x_C - x_A) + (y_B - y_A)(y_C - y_A) = 0 \quad (12)$$

אם בשוויון (11) נפתח סוגריים, נעביר את כל האיברים לאגף השמאלי, נבצע כינוס איברים דומים ולאחר מכן נחלק את השוויון אשר יתקבל ב-2, נקבל בדיוק את אותו שוויון אשר יתקבל אם נפתח סוגריים בשוויון (12). לכן משוואה (12) שקולה למשוואה (11)

נקבל את משוואה (12) בדרך נוספת.

אם אף אחד מהישרים AB ו- AC לא מאונך לציר ה- x , אז שיפועיהם מוגדרים והישרים מאונכים זה לזה אך ורק אם מתקיים:

$$m_{AB} \cdot m_{AC} = -1 \quad (13)$$

עבור השיפוע m_{AB} של הישר AB מתקיים:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

עבור השיפוע m_{AC} של הישר AC מתקיים:

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$$

נציב בשוויון (13) לפי שני השוויונים האחרונים, ונקבל:

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = -1 \quad (14)$$

נכפיל את השוויון האחרון ב- $(x_B - x_A)(x_C - x_A)$, ונקבל:

$$(y_B - y_A)(y_C - y_A) = -(x_B - x_A)(x_C - x_A) \quad (15)$$

השוויון האחרון שקול לשוויון (12).

נציין כי אף על פי ששוויון (14) לא מתאר את המקרים שבהם $x_A = x_B$ או $x_A = x_C$, אך

שוויון (15) מתאר גם אותם.

כעת נוכל להתבונן במערכת המשוואות הבאה:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_P = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_P = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ (x_B - x_A)(x_C - x_A) + (y_B - y_A)(y_C - y_A) = 0 \\ x_A = 2 \\ y_A = 4 \\ x_B = -2 \\ y_C = 2 \end{array} \right. \quad (16)$$

זאת מערכת של 7 משוואות עם 8 נעלמים. מטרתנו היא לקבל על סמך המערכת אחרונה

את המשוואה המקשרת את הנעלמים x_P ו- y_P .

נציב בשלוש המשוואות הראשונות של מערכת (16) לפי ארבע המשוואות האחרונות שלה (ליתר דיוק במשוואה הראשונה נציב לפי המשוואות הרביעית והשישית, במשוואה השנייה

נציב לפי המשוואות החמישית והשביעית, ובמשוואה השלישית נציב לפי כל ארבע המשוואות האחרונות של מערכת משוואות זו), ונקבל:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_P = \frac{2-2+x_C}{3} \\ y_P = \frac{4+y_B+2}{3} \\ (-2-2)(x_C-2) + (y_B-4)(2-4) = 0 \\ x_A = 2 \\ y_A = 4 \\ x_B = -2 \\ y_C = 2 \end{array} \right.$$

נתבונן במערכת הבאה המורכבת משלוש המשוואות הראשונות של מערכת המשוואות האחרונה:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_P = \frac{2-2+x_C}{3} \\ y_P = \frac{4+y_B+2}{3} \\ (-2-2)(x_C-2) + (y_B-4)(2-4) = 0 \end{array} \right. \quad (17)$$

זו מערכת של שלוש משוואות עם ארבעה נעלמים. היא שקולה למערכת המשוואות הבאה:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_P = \frac{x_C}{3} \\ y_P = \frac{y_B+6}{3} \\ 2x_C + y_B - 8 = 0 \end{array} \right.$$

נבודד את ה- x_C במשוואה הראשונה ואת ה- y_B במשוואה השנייה של מערכת זו, ונקבל את המערכת הבאה השקולה למערכת הקודמת:

$$\begin{cases} x_C = 3x_P \\ y_B = 3y_P - 6 \\ 2x_C + y_B - 8 = 0 \end{cases}$$

נציב במשוואה השלישית של המערכת האחרונה לפי שתי המשוואות האחרונות, ונקבל את המשוואה הבאה :

$$2 \cdot 3x_P + 3y_P - 6 - 8 = 0$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה הבאה :

$$6x_P + 3y_P - 14 = 0$$

המשוואה של המקום הגיאומטרי אשר התבקשו למצוא היא :

$$6x + 3y - 14 = 0$$

המקום הגיאומטרי המדובר הוא ישר. המשוואה המפורשת של הישר היא :

$$y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{3}$$

הערה. כפי שכבר אמרנו בפרק הקודם, אם מיקומה של נקודה שרירותית P השייכת למקום הגיאומטרי שאת משוואתו צריך למצוא נקבע חד-משמעית על ידי מיקומן של $k-1$ נקודות $(x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_k, y_k)$ ונתונים ערכים של m מתוך $2k-2$ הנעלמים $x_2, y_2, x_3, y_3, \dots, x_k, y_k$, אז כבר מתחילת פתרון הבעיה אפשר להתרכז בניסיון להרכיב מערכת של $2k-m-1$ משוואות $2k-m$ נעלמים, ולא להתבונן כלל במערכת $2k-1$ משוואות עם $2k$ נעלמים.

בבעיה אשר פתרנו בפרק זה יכולנו להרכיב את מערכת (17) של 3 משוואות עם 4 נעלמים בלי להתבונן במערכת (16) של 7 משוואות עם 8 נעלמים.

27. עוד מקום, ושוב אותה שיטה

רוב הבעיות שלי צצות כאשר למישהו אחר יש בעיה, והוא מנסה להפוך את הבעיה שלו לבעיה שלי.

בעיה. באלפסה $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$ חסום משולש ABC . הצלע AC של המשולש מתלכדת

עם הציר הקטן של האליפסה. קודקוד B נמצא על האליפסה. דרך קודקוד A מעבירים ישר שמאונך לישר AB . דרך קודקוד C מעבירים ישר שמאונך לישר BC . מצאו את המקום הגיאומטרי של נקודות המפגש של אנכים אלו.

דרך החשיבה ופתרון.

מה צריך למצוא?

צריך למצוא את המקום הגיאומטרי של נקודות שכל אחת מהן מקיימת כמה תנאים. באילו תנאים מדובר?

לפני שנענה על שאלה זו, נסמן נקודה שרירותית מהמקום הגיאומטרי המדובר ב- P . כעת נוכל להשיב על השאלה האחרונה בצורה הבאה.

נקודה P חייבת לקיים אך ורק את התנאים הבאים:

$$AP \perp AB \quad (1)$$

$$CP \perp BC \quad (2)$$

כאן הנקודות A , B ו- C הן קודקודים של משולש חסום באלפסה

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1 \quad (3)$$

$$\text{הצלע } AC \text{ של המשולש היא הציר הקטן באלפסה (3)} \quad (4)$$

$$\text{הנקודה } B \text{ נמצאת על אליפסה (3).} \quad (5)$$

מיקום נקודה P תלוי במיקום הנקודות A , B ו- C . ננסה להרכיב 7 משוואות עם 8

הנעלמים הבאים: $x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C, x_P, y_P$.

נתרכז בטענה (4) ונשאל את עצמנו: מהו הציר הקטן באלליפסה?
אם נתונה אליפסה

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ומתקיים:

$$a > b \quad (6)$$

אז הציר הקטן של אליפסה זו הוא הקטע המחבר את הנקודות $(0, -b)$ ו- $(0, b)$ (הציר הגדול של אליפסה זו הוא הקטע המחבר את הנקודות $(-a, 0)$ ו- $(a, 0)$).¹

עבור אליפסה (3) מתקיים:

$$a = 10, b = 5 \quad (7)$$

בהסתמך על שורה (7) מסיקים כי עבור אליפסה (3) אי-שוויון (6) מתקיים. מכאן ומשוויון $b = 5$ נובע כי

(8) הציר הקטן של אליפסה (3) הוא הקטע המחבר את הנקודות $(0, -5)$ ו- $(0, 5)$.

מטענות (4) ו-(8) נובע כי

$$A(0, 5), C(0, -5) \quad (9)$$

או

$$A(0, -5), C(0, 5) \quad (10)$$

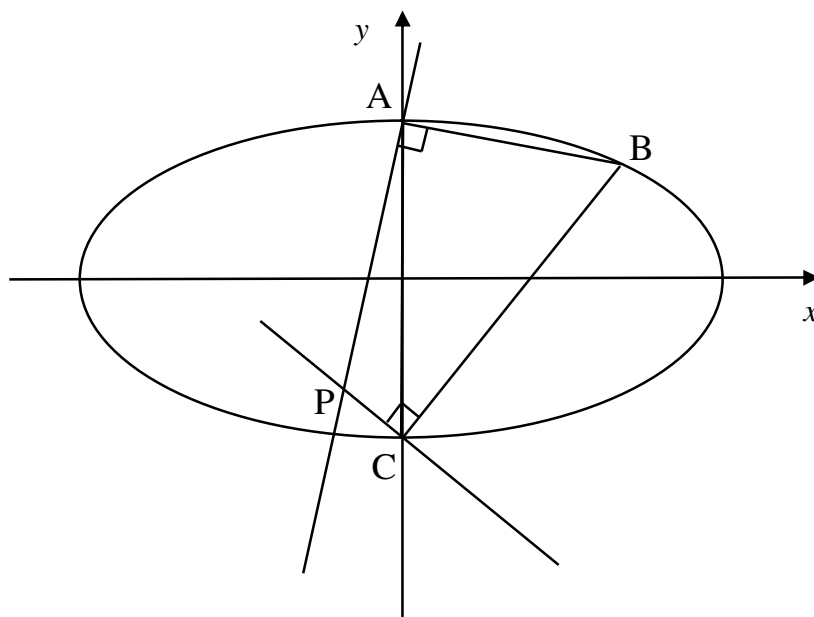
נתרכז במקרה שבו טענה (9) מתקיימת. על סמך טענה (9) מסיקים כי

$$x_A = 0, y_A = 5$$

$$x_C = 0, y_C = -5$$

הרכבנו 4 משוואות עם חלק מהנעלמים הנ"ל. עלינו להרכיב עוד שלוש משוואות.

¹ גם לאורכי הקטעים קוראים בהתאמה הציר הגדול והציר הקטן של האליפסה.



נתרכז בטענה (5). טענה זו מתקיימת אך ורק אם מתקיים :

$$\frac{x_B^2}{100} + \frac{y_B^2}{25} = 1$$

כעת ברשותנו חמש משוואות. עלינו להרכיב עוד שתי משוואות.

במה מהנתון עוד לא השתמשנו?

לא השתמשנו בטענות (1) ו-(2).

אם השיפוע m_{AB} של הישר AB וגם השיפוע m_{AP} של הישר AP מוגדרים, אז טענה (1)

מתקיימת אך ורק אם מתקיים :

$$m_{AP} \cdot m_{AB} = -1 \quad (11)$$

עבור השיפוע m_{AB} של הישר AB מתקיים :

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad (12)$$

עבור השיפוע m_{AP} של הישר AP מתקיים :

$$m_{AP} = \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A} \quad (13)$$

נציב בשוויון (11) לפי שוויונים (12) ו-(13), ונקבל:

$$\frac{y_P - y_A}{x_P - x_A} \cdot \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -1 \quad (14)$$

קיבלנו עוד משוואה אחת עם הנעלמים הנ"ל. נכפיל אותה ב- $(x_P - x_A)(x_B - x_A)$, ונקבל:

$$(x_P - x_A)(x_B - x_A) = -(y_P - y_A)(y_B - y_A)$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה הבאה:

$$(x_P - x_A)(x_B - x_A) + (y_P - y_A)(y_B - y_A) = 0 \quad (15)$$

נקבל את משוואה (15) בדרך נוספת:

הישר AP מאונך לישר AB אך ורק אם

$$\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AB}$$

הטענה האחרונה מתקיימת אך ורק אם המכפלה הסקלרית של הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{AB}$ שווה ל-0:

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad (16)$$

עבור הווקטורים המופיעים בשוויון האחרון מתקיים:

$$\overrightarrow{AP} = (x_P - x_A, y_P - y_A) \quad (17)$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) \quad (18)$$

כאשר נציב בשוויון (16) לפי שורות (17) ו-(18), נקבל את משוואה (15).

קבלו בעצמכם בתור תרגיל, על סמך טענה (2), את המשוואה הבאה:

$$(x_P - x_C)(x_B - x_C) + (y_P - y_C)(y_B - y_C) = 0 \quad (19)$$

כעת נוכל להתבונן במערכת המשוואות הבאה:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_A = 0 \\ y_A = 5 \\ x_C = 0 \\ y_C = -5 \\ \frac{x_B^2}{100} + \frac{y_B^2}{25} = 1 \\ (x_P - x_A)(x_B - x_A) + (y_P - y_A)(y_B - y_A) = 0 \\ (x_P - x_C)(x_B - x_C) + (y_P - y_C)(y_B - y_C) = 0 \end{array} \right.$$

זאת מערכת של 7 משוואות עם 8 נעלמים.

נציב במשוואה השישית של מערכת המשוואות האחרונה לפי המשוואות הראשונה והשנייה, ובמשוואה השביעית לפי המשוואות השלישית והרביעית. נקבל:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_A = 0 \\ y_A = 5 \\ x_C = 0 \\ y_C = -5 \\ \frac{x_B^2}{100} + \frac{y_B^2}{25} = 1 \\ x_P x_B + (y_P - 5)(y_B - 5) = 0 \\ x_P x_B + (y_P + 5)(y_B + 5) = 0 \end{array} \right.$$

כעת נוכל להתרכז במערכת הבאה המורכבת משלוש המשוואות האחרונות של מערכת המשוואות הקודמת:

$$\begin{cases} \frac{x_B^2}{100} + \frac{y_B^2}{25} = 1 \\ x_P x_B + (y_P - 5)(y_B - 5) = 0 \\ x_P x_B + (y_P + 5)(y_B + 5) = 0 \end{cases} \quad (20)$$

זאת מערכת של שלוש משוואות עם ארבעה נעלמים.

נחסר מהמשוואה השלישית של מערכת המשוואות האחרונה את המשוואה השנייה,

ונקבל:

$$\begin{cases} \frac{x_B^2}{100} + \frac{y_B^2}{25} = 1 \\ x_P x_B + (y_P - 5)(y_B - 5) = 0 \\ (y_P + 5)(y_B + 5) - (y_P - 5)(y_B - 5) = 0 \end{cases} \quad (21)$$

המשוואה האחרונה במערכת המשוואות האחרונה שקולה למשוואה הבאה:

$$y_P y_B + 5y_P + 5y_B + 25 - (y_P y_B - 5y_P - 5y_B + 25) = 0$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה הבאה:

$$y_P = -y_B$$

לכן מערכת (21) שקולה למערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} \frac{x_B^2}{100} + \frac{y_B^2}{25} = 1 \\ x_P x_B + (y_P - 5)(y_B - 5) = 0 \\ y_P = -y_B \end{cases}$$

נציב במשוואה השנייה של המערכת האחרונה, ונקבל:

$$\begin{cases} \frac{x_B^2}{100} + \frac{y_B^2}{25} = 1 \\ x_P x_B + (-y_B - 5)(y_B - 5) = 0 \\ y_P = -y_B \end{cases}$$

נפתח סוגריים במשוואה השנייה של המערכת האחרונה, ונקבל את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} \frac{x_B^2}{100} + \frac{y_B^2}{25} = 1 \\ x_P x_B - y_B^2 + 25 = 0 \\ y_P = -y_B \end{cases}$$

המערכת האחרונה שקולה למערכת הבאה:

$$\begin{cases} \frac{x_B^2}{100} + \frac{y_B^2}{25} = 1 \\ x_P x_B - y_B^2 = -25 \\ y_P = -y_B \end{cases}$$

נחבר אל המשוואה השנייה של המערכת האחרונה את המשוואה הראשונה המוכפלת ב-

25, ונקבל:

$$\begin{cases} \frac{x_B^2}{100} + \frac{y_B^2}{25} = 1 \\ x_P x_B + \frac{x_B^2}{4} = 0 \\ y_P = -y_B \end{cases} \quad (22)$$

המשוואה השנייה של המערכת האחרונה שקולה למשוואה הבאה:

$$x_B \left(x_P + \frac{x_B}{4} \right) = 0$$

מכאן

$$x_B = 0$$

או

$$x_P + \frac{x_B}{4} = 0 \quad (23)$$

במקרה שבו $x_B = 0$, נקודה B מתלכדת עם נקודה A או עם נקודה C .
 כאשר, לדוגמה, נקודה B מתלכדת עם נקודה A , אי אפשר לדבר על משולש ABC , על
 ישר AB ועל אנך לישר זה (על אף פי שאפשר לדבר על ישר BC ועל אנך לישר AC). לכן
 עלינו להוציא את המקרה שבו $x_B = 0$.

משוואה (23) שקולה למשוואה הבאה:

$$x_B = -4x_P \quad (24)$$

נחליף במערכת (22) את המשוואה השנייה במשוואה (24) ואת המשוואה השלישית
 במשוואה

$$y_B = -y_P$$

השקולה לה, ונקבל:

$$\begin{cases} \frac{x_B^2}{100} + \frac{y_B^2}{25} = 1 \\ x_B = -4x_P \\ y_B = -y_P \end{cases}$$

נציב במשוואה הראשונה של המערכת האחרונה לפי שתי המשוואות האחרונות שלה,
 ונקבל:

$$\begin{cases} \frac{16x_P^2}{100} + \frac{y_P^2}{25} = 1 \\ x_B = -4x_P \\ y_B = -y_P \end{cases}$$

המשוואה הראשונה במערכת האחרונה שקולה למשוואה הבאה :

$$\frac{x_P^2}{(2.5)^2} + \frac{y_P^2}{5^2} = 1$$

המקום הגיאומטרי המדובר הוא אליפסה

$$\frac{x^2}{(2.5)^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$$

להוציא הנקודות $A(0,5)$ ו- $C(0,-5)$. שימו לב כי הקטע AC הוא הציר הגדול של

האליפסה האחרונה. מוקדי האליפסה נמצאים על ציר ה- y .

במקרה שבו טענה (10) מתקיימת, מקבלים את אותה תשובה.

28. ליעד הרביעי באותה דרך

אני משוכנע כי גם מי שיכולת החשיבה שלו אינה גבוהה, אם יהיו לו כלי העזר המעניקים יתרון והוא יתרגל עמם, יוכל להגיע להישגים גבוהים יותר מאשר בעל יכולת חשיבה גבוהה, כפי שילד יכול בעזרת סרגל להעביר קו טוב יותר מאשר אמן בלי סרגל.

(גוטפריד לייבניץ)

בעיה. נקודה A נמצאת על מעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 = 36$. רדיוס של מעגל זה המועבר אל נקודה A חותך את המעגל $x^2 + y^2 = 4$ בנקודה B . דרך נקודה A עובר הישר המאונך לציר ה- y ודרך נקודה B עובר הישר המאונך לציר ה- x . שני הישרים נחתכים בנקודה P . מהו המקום הגיאומטרי של כל הנקודות P .

נפתור את הבעיה בשתי דרכים שונות.

דרך החשיבה ופתרון א'.

מה אנחנו מתבקשים לעשות בבעיה זו?

אנחנו מתבקשים לענות על השאלה הבאה: מהו המקום הגיאומטרי של כל הנקודות P אשר נבנו בדרך המתוארת בבעיה.

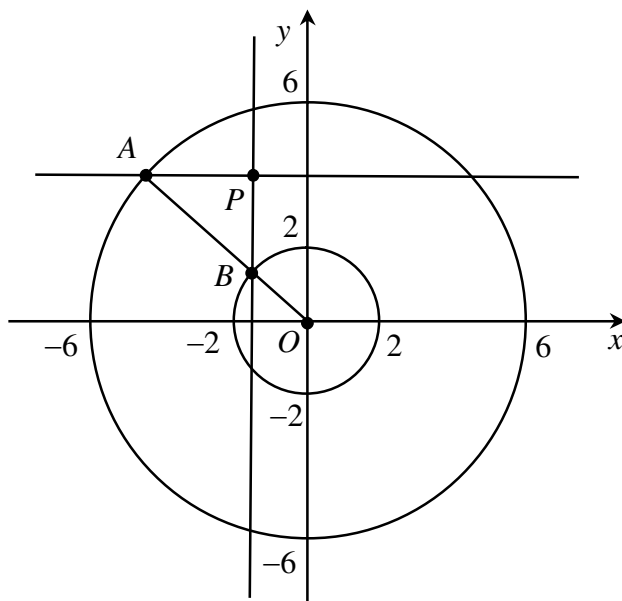
אם המקום הגיאומטרי הוא קו או חלק מקו כלשהו, אז עלינו קודם כל למצוא את משוואת הקו. לאחר מכן עלינו לנסות לברר לאיזה סוג של קווים קו זה שייך. על סמך הנתון בבעיה מסיקים כי מיקומן של נקודות A ו- B קובע חד-משמעית את מיקומה של נקודה P . ננסה להרכיב חמש משוואות עם שישה הנעלמים הבאים: x_A ,

$$y_P, x_P, y_B, x_B, y_A$$

ראשית ניעזר בכך שלפי הנתון בבעיה,

(1) הנקודות A ו-P נמצאות על אותו ישר המאונך לציר ה-y.

(2) הנקודות B ו-P נמצאות על אותו ישר המאונך לציר ה-x.



טענה (1) שקולה לטענה הבאה :

$$y_A = y_P \quad (3)$$

ואילו טענה (2) שקולה לטענה הבאה :

$$x_B = x_P \quad (4)$$

כעת ניעזר בכך שלפי הנתון

$$נקודה A נמצאת על המעגל $x^2 + y^2 = 36$.$$

טענה זו מתקיימת אך ורק אם מתקיים :

$$x_A^2 + y_A^2 = 36 \quad (5)$$

ומה נאמר בבעיה על נקודה B ?

לפי הנתון

$$\begin{aligned} \text{נקודה } B \text{ היא נקודת החיתוך של מעגל } x^2 + y^2 = 4 \text{ עם רדיוס} \\ \text{המעגל } x^2 + y^2 = 36 \text{ המועבר אל נקודה } A. \end{aligned} \quad (6)$$

מרכזם של שני המעגלים הנ"ל נמצא בנקודה $O(0,0)$; רדיוס המעגל $x^2 + y^2 = 4$ הוא 2 יח'; רדיוס המעגל $x_A^2 + y_A^2 = 36$ הוא 6 יח'. לכן מטענה (6) נובע כי

$$OA = 6$$

$$OB = 2 \quad (7)$$

$$BA = OA - OB$$

נציב בשוויון האחרון לפי שני השוויונים הקודמים, ונקבל:

$$BA = 6 - 2 = 4 \quad (8)$$

על סמך שוויונים (7) ו-(8) מסיקים כי

נקודה B מחלקת את הקטע OA ביחס 1:2

$$\left(\frac{OB}{BA} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \right) \text{ (הרי)}$$

ניעזר בנוסחאות המקשרות בין השיעורים של הנקודה המחלקת את הקטע ביחס נתון לבין השיעורים של קצות הקטע, ונקבל:

$$x_B = \frac{2x_O + 1 \cdot x_A}{1+2} = \frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot x_A}{1+2} = \frac{x_A}{3} \quad (9)$$

$$y_B = \frac{2y_O + 1 \cdot y_A}{1+2} = \frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot y_A}{1+2} = \frac{y_A}{3} \quad (10)$$

כעת ברשותנו חמש משוואות עם שישה הנעלמים הנ"ל: המשוואות (3), (4), (5)

והמשוואות:

$$, x_B = \frac{x_A}{3} \quad (11)$$

$$y_B = \frac{y_A}{3} \quad (12)$$

משוואה (11) שקולה למשוואה הבאה :

$$x_A = 3x_B$$

משוואה (12) שקולה למשוואה הבאה :

$$y_A = 3y_B$$

נתבונן במערכת

$$\begin{cases} y_A = y_P \\ x_B = x_P \\ x_A^2 + y_A^2 = 36 \\ x_A = 3x_B \\ y_A = 3y_B \end{cases} \quad (13)$$

המורכבת ממשוואות (3), (4), (5) ומשתי המשוואות האחרונות.

נציב במשוואה הרביעית של המערכת האחרונה לפי המשוואה השנייה ונקבל את

המערכת הבאה, השקולה למערכת הקודמת :

$$\begin{cases} y_A = y_P \\ x_B = x_P \\ x_A^2 + y_A^2 = 36 \\ x_A = 3x_P \\ y_A = 3y_B \end{cases}$$

נציב במשוואה השלישית של המערכת האחרונה לפי המשוואות הראשונה והרביעית,

ונקבל את המשוואה הבאה :

$$9x_P^2 + y_P^2 = 36$$

מכאן המשוואה של המקום הגיאומטרי המדובר היא :

$$9x^2 + y^2 = 36$$

נחלק את המשוואה האחרונה ב-36, ונקבל:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה הבאה:

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$$

מכאן המקום הגיאומטרי המדובר הוא אליפסה עם חוצי הצירים הבאים:

$$a = 2, \quad b = 6$$

בהסתמך על האי-שוויון $b > a$ מסיקים כי מוקדי האליפסה נמצאים בנקודות $(0, -c)$ ו- $(0, c)$, כאן

$$c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{36 - 4} = \sqrt{32}$$

הערה. שימו לב שמצאנו את משוואת המקום הגיאומטרי בלי להיעזר במשוואה החמישית במערכת (13).

דרך החשיבה ופתרון ב'.

לאחר שמקבלים את משוואות (3), (4) ו- (5) כפי שתואר לעיל, אפשר להסיק מטענה (6) מסקנות שונות מאלו שהסקנו קודם; אפשר לשים לב כי טענה (6) מתקיימת אם מתקיים:

$$x_B^2 + y_B^2 = 4 \quad (14)$$

וגם

$$m_{OB} = m_{OA} \quad (15)$$

וגם

$$x_A \cdot x_B > 0 \quad (16)$$

נציב בשוויון (15) לפי השורות

$$m_{OA} = \frac{y_A - 0}{x_A - 0} = \frac{y_A}{x_A}$$

ו-

$$m_{OB} = \frac{y_B - 0}{x_B - 0} = \frac{y_B}{x_B}$$

נקבל:

$$\frac{y_B}{x_B} = \frac{y_A}{x_A} \quad (17)$$

כעת אפשר להתבונן במערכת

$$\begin{cases} y_A = y_P \\ x_B = x_P \\ x_A^2 + y_A^2 = 36 \\ x_B^2 + y_B^2 = 4 \\ \frac{y_B}{x_B} = \frac{y_A}{x_A} \\ x_A \cdot x_B > 0 \end{cases} \quad (18)$$

המורכבת ממשוואות (3), (4), (5), (14), (17) ומאי-שוויון (16).

נחליף במערכת האחרונה את המשוואה רביעית במשוואה

$$x_B^2 \left[1 + \left(\frac{y_B}{x_B} \right)^2 \right] = 36$$

ונקבל את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} y_A = y_P \\ x_B = x_P \\ x_A^2 + y_A^2 = 36 \\ x_B^2 \left[1 + \left(\frac{y_B}{x_B} \right)^2 \right] = 4 \\ \frac{y_B}{x_B} = \frac{y_A}{x_A} \\ x_A \cdot x_B > 0 \end{cases}$$

המערכת האחרונה שקולה למערכת (18).

נציב במשוואה הרביעית של המערכת האחרונה לפי המשוואה החמישית, ונקבל את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} y_A = y_P \\ x_B = x_P \\ x_A^2 + y_A^2 = 36 \\ x_B^2 \left[1 + \left(\frac{y_A}{x_A} \right)^2 \right] = 4 \\ \frac{y_B}{x_B} = \frac{y_A}{x_A} \\ x_A \cdot x_B > 0 \end{cases} \quad (19)$$

המשוואה הרביעית במערכת זו שקולה למשוואה הבאה:

$$\left(\frac{x_B}{x_A} \right)^2 (x_A^2 + y_A^2) = 4 \quad (20)$$

נציב במשוואה זו לפי המשוואה השלישית של מערכת (19), ונקבל את המשוואה הבאה:

$$\left(\frac{x_B}{x_A} \right)^2 36 = 4$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה הבאה :

$$\left(\frac{x_B}{x_A}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

המערכת המורכבת ממשוואה זו ומהאי-שוויון האחרון במערכת (19) (אי-שוויון (16)) שקולה למשוואה

$$\frac{x_B}{x_A} = \frac{1}{3}$$

כעת נוכל להתבונן במערכת הבאה השקולה למערכת (19).

$$\left\{ \begin{array}{l} y_A = y_P \\ x_B = x_P \\ x_A^2 + y_A^2 = 36 \\ \frac{x_B}{x_A} = \frac{1}{3} \\ \frac{y_B}{x_B} = \frac{y_A}{x_A} \end{array} \right. \quad (21)$$

מערכת זו שקולה למערכת

$$\left\{ \begin{array}{l} y_A = y_P \\ x_B = x_P \\ x_A^2 + y_A^2 = 36 \\ x_A = 3x_B \\ \frac{y_B}{x_B} = \frac{y_A}{x_A} \end{array} \right. \quad (22)$$

(הכפלו ב- $3x_A$ את המשוואה הרביעית במערכת (21)).

אם נציב במשוואה האחרונה של מערכת (22) לפי המשוואה הרביעית ונכפיל את המשוואה אשר תתקבל ב- x_B , נקבל את מערכת (13) אשר קיבלנו קודם בדרך קצרה יותר. בעצם, מי שקיבל את מערכת (22) לא חייב להגיע למערכת (13) כדי לקבל את המשוואה של המקום הגיאומטרי. די בכך שיתרכזו בארבע המשוואות הראשונות של מערכת (22).

29. במרחבים רב-ממדיים (יוצאים מן המישור)

אם סימנו סביבך מעגל ואין נותנים לך לצאת ממנו – מה תעשה?
 אולי, במקום לנסות לפרוץ את המעגל צא מהמישור שבו אתה נמצא למרחב תלת-ממדי. במרחב התלת-ממדי אף מעגל לא יחסום אותך מלהגיע לכל נקודה.
 ואם אתה נמצא במרחב תלת-ממדי כלשהו, שבו כל תנועותיך, מסביבך הקימו קליפה כדורית ולא נותנים לך לצאת ממנה – מה תעשה?
 עצתי, צא מהמרחב התלת-ממדי למרחב ארבע-ממדי. אותה קליפה כדורית שחסמה את דרכך במרחב תלת-ממדי לא תחסום אותך במרחב ארבע-ממדי.
 ואם שוב ינסו להגביל את תנועתך, דע כי קיימים מרחבים בעלי חמישה ממדים, שישה, שבעה... אין לזה סוף. יתרה מזאת, קיימים גם מרחבים בעלי אינסוף ממדים, וכל אחד מהם כלול באינסוף מרחבים גדולים יותר.

האם שמתם לב שבפרקים הקודמים תמיד, אפילו במקרים שבהם לא אמרנו זאת בבירור, כשחיפשנו את השיעורים של נקודה כלשהי במישור פתרנו מערכת של $k + 2$ עם $k + 2$ נעלמים (כאן k הוא מספר שלם לא שלילי)? לפעמים לפתרון בעיה מסוג זה אפשר היה להרכיב ולפתור מערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים, אך היו גם מקרים שבהם היינו צריכים להתמודד עם מספר גדול יותר של נעלמים ומשוואות.
 הנה דוגמה למקרה שבו כדי למצוא את השיעורים של נקודה מסוימת פותרים מערכת של $k + 2$ משוואות עם $k + 2$ נעלמים, אך לא אומרים זאת בבירור: אם נקודה M היא אמצע הקטע המחבר את נקודות $A(1, 2)$ ו- $B(3, 8)$, אז כדי למצוא את שיעורי נקודה M פותרים, למעשה, את המערכת

$$\left\{ \begin{array}{l} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \\ x_A = 1 \\ y_A = 2 \\ x_B = 3 \\ y_B = 8 \end{array} \right. \quad (1)$$

בלי לרשום את שש המשוואות האחרונות אחת מתחת לשנייה.

פתרון של מערכת עם n נעלמים $x_1, x_2, \dots, x_n$ ממשיים הוא n -יה (מבוטא "אֶנְיָה")

מסודרת $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ של מספרים ממשיים המקיימת כל משוואה של המערכת.

לאוסף של כל ה- n יות $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ של מספרים ממשיים קוראים מרחב ממשי n -

ממדי $\mathbb{R}^n$. אם לאיבר במרחב $\mathbb{R}^n$ נקרא נקודה ולמספרים $a_1, a_2, \dots, a_n$ נקרא שיעורי

הנקודה $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ במרחב $\mathbb{R}^n$, אז נוכל לומר כי פתרון של מערכת משוואות עם n

נעלמים ממשיים הוא נקודה במרחב $\mathbb{R}^n$ אשר שיעוריה מקיימים כל משוואה של המערכת.

נחליף את סימון הנעלמים במערכת (1): במקום x_A נרשום x_1 , במקום $y_1 - y_A$, במקום

$x_B - x_2$, במקום $y_2 - y_B$, במקום $x_3 - x_M$ ובמקום $y_3 - y_M$. נקבל:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2} \\ x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ y_2 = 8 \end{array} \right. \quad (2)$$

פתרון מערכת המשוואות האחרונה הוא ששיית המספרים המסודרת $(x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0, x_3^0, y_3^0)$ המקיימת כל משוואה של מערכת זו. ששיית המספרים המסודרת הזו היא הנקודה $(1, 2, 3, 8, 2, 5)$ במרחב $\mathbb{R}^6$.

עבור כל נקודה $(x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0, x_3^0, y_3^0)$ במרחב $\mathbb{R}^6$ נקרא לנקודה $(0, 0, 0, 0, x_3^0, y_3^0)$ היטל אורתוגונלי (היטל אנכי) של הנקודה $(x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0, x_3^0, y_3^0)$ למישור $x_3 y_3$ במרחב זה; נזהה את ששיית המספרים הסדורה $(0, 0, 0, 0, x_3^0, y_3^0)$ עם זוג המספרים הסדור (x_3^0, y_3^0) ; כעת נוכל לומר כי אמצע הקטע המחבר את נקודות $A(1, 2)$ ו- $B(3, 8)$ הוא היטל אורתוגונלי למישור $x_3 y_3$ של פתרון המערכת (2).

כעת נניח שעלינו למצוא את השיעורים x_1 ו- y_1 של נקודה כלשהי במישור. גם נניח כי כדי למצוא את השיעורים עלינו להוסיף אל נעלמים x_1 ו- y_1 עוד k נעלמים ולפתור מערכת של $k+2$ משוואות עם $k+2$ נעלמים (כאן $k > 0$). במקרה זה נוכל לומר כי הנקודה שאת שיעוריה צריך למצוא היא היטל אורתוגונלי במרחב $\mathbb{R}^{k+2}$ למישור $x_1 y_1$ של פתרון המערכת של $k+2$ משוואות עם $k+2$ נעלמים. אם יהיה עליכם למצוא משוואה של מקום גיאומטרי כלשהו, ותסמנו נקודה שרירותית השייכת למקום גיאומטרי זה ב- $P(x_1, y_1)$, אז כדי לפתור את הבעיה בדרך המתוארת בפרק 25 (ראו גם פרקים 26, 27 ו-28) תצטרכו להוסיף אל נעלמים x_1 ו- y_1 עוד k נעלמים, ולהרכיב מערכת של $k+1$ משוואות עם $k+2$ נעלמים (כאן $k \geq 0$).

אוסף של כל הפתרונות של המערכת שתתקבל יהיה, קרוב לוודאי, קו במרחב $\mathbb{R}^{k+2}$. המקום הגיאומטרי שאת משוואתו תתבקשו למצוא יהיה ההיטל האורתוגונלי של הקו האחרון למישור $x_1 y_1$ ¹.

בסוף פרק 26 הגענו למערכת הבאה של שלוש משוואות עם ארבעה נעלמים:

¹ אם ℓ הוא קו במרחב $\mathbb{R}^{k+2}$ ושני השיעורים הראשונים של כל נקודה במרחב האחרון הם שיעור ה- x_1 ושיעור ה- y_1 , אז היטל אורתוגונלי של הקו ℓ למישור $x_1 y_1$ הוא אוסף כל הנקודות P המקיימות את התנאי הבא: הנקודה P היא היטל אורתוגונלי למישור $x_1 y_1$ של נקודה כלשהי הנמצאת על הקו ℓ .

$$\begin{cases} x_C = 3x_P \\ y_B = 3y_P - 6 \\ 2x_C + y_B - 8 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

אוסף של כל הרביעיות המסודרות של מספרים ממשיים הוא מרחב $\mathbb{R}^4$. נקרא לשיעור הראשון של נקודה במרחב האחרון שיעור ה- x_P , לשיעור השני – שיעור ה- y_P , לשיעור השלישי שיעור ה- x_C ולשיעור הרביעי – שיעור ה- y_C . (אפשר לומר שאנחנו מתבוננים כעת במערכת צירים קרטזית במרחב ממשי בעל ארבעה ממדים שבה הציר הראשון הוא ציר ה- x_P , הציר השני – ציר ה- y_P , הציר השלישי ציר ה- x_C והציר הרביעי – ציר ה- y_C). האוסף של כל הפתרונות של מערכת (3) הוא ישר במרחב $\mathbb{R}^4$. המקום הגיאומטרי שאת משוואתו היה עלינו למצוא בפרק 26 הוא ההיטל האורתוגונלי של הישר האחרון למישור $x_P y_P$. גם הוא ישר.

בפרק 28 הגענו למערכת הבאה של חמש משוואות עם שישה נעלמים:

$$\begin{cases} y_A = y_P \\ x_B = x_P \\ x_A^2 + y_A^2 = 36 \\ x_A = 3x_B \\ y_A = 3y_B \end{cases} \quad (4)$$

אוסף כל הפתרונות של מערכת זו הוא קו במרחב $\mathbb{R}^6$. נסמן את קו זה ב- ℓ . אוסף של כל הנקודות במרחב $\mathbb{R}^6$ המקיימות את ארבע המשוואות הראשונות במערכת המשוואות האחרונה הוא משטח דו-ממדי גלילי המכיל כל ישר החותך את הקו ℓ ומקביל לציר ה- y_B ולא כולל אף נקודה שלא נמצאת על אף ישר כזה. ההיטל האורתוגונלי של המשטח האחרון למישור $x_P y_P$ וההיטל האורתוגונלי של הקו ℓ למישור האחרון מתלכדים זה עם זה. הדבר מאפשר למצוא את המשוואה של המקום הגיאומטרי שבו מדובר בפרק 28 בהסתמך אך ורק על ארבע המשוואות הראשונות במערכת (4).

30. שינויים בכביש

כמה חבל שהחיים של כלבים כה קצרים. הייה לי כלב אשר ידע לספור עד שלוש. כיצד גיליתי שהוא מסוגל לזה? ולאלו מסקנות אתם תגיעו לאחר שאספר על מה שהוא עשה לי? בדרך כלל יצאתי עם הכלב שלוש פעמים ביום: מוקדם בבוקר, בשלוש-ארבע אחרי צהריים ומאוחר בערב, אך היו גם ימים כשיצאתי לעבודה מוקדם בבוקר וחזרתי הביתה רק מאוחר בערב; הוא לא סלח לי שלא טיילנו אחרי צהריים והכריח אותי לצאת איתו פעמיים בערב, את הטיול השני בערב הכלב דרש בעוד חצי שעה לאחר שחזרנו מהטיול הראשון. איזה כלב חכם היה לי! ואם אני אגיד שמישהו מתלמידי כיתה י' יודע לספור עד שלוש, אתם תחליטו שאני צוחק עליכם. כן, הכול יחסי בעולם זה. מה שהישג מרשים לאחד, נמצא לעיתים קרובות הרבה מתחת למה שמצפים מאחר.

אם במבחן במתמטיקה יש דרישות גבוהות ליכולת החשיבה של הנבחנים ולא רק לזיכרוןם, זה אומר שלמחברי המבחן יש ציפיות גבוהות מהנבחנים, זאת הבעת הכבוד. לדעתי, מי שמתלונן על מבחן קשה, לא מכבד את עצמו. עליו ברגעי החולשה להיזכר בדבריו הבאים של סופר נודע בלטסר גרסיאן: "תכבד את עצמך אם אתה רצה שאנשים אחרים יכבדו אותך". ושייזכר בשורות הבאות מהמחזה "הנרי הרביעי" מאת וויליאם שייקספיר:

O! the blood more stirs
To rose a lion than to start a hare!

בפרקים 25-28 כשניסינו למצוא את המשוואה של המקום הגיאומטרי הנזכר בבעיה עשינו קודם כל את הדבר הבא: נוסף על השיעורים של נקודה שרירותית P השייכת למקום הגיאומטרי המדובר התבוננו גם בשיעורים של נקודות המשפיעות על מיקומה של נקודה P וקובעות אותו באופן חד-משמעי; לאחר מכן הרכבנו את מערכת המשוואות שבהן הנעלמים היו השיעורים של נקודה P והשיעורים של הנקודות המשפיעות על מיקומה (או רק של אלו מהן אשר שיעוריהן לא היו קבועים ידועים).

קיימות גם בעיות למציאת משוואה של מקום גיאומטרי שאותן עדיף לפתור אחרת. אם, לדוגמה, בבעיה נזכר מעגל שרדיוסו משתנה כאשר הנקודה P נעה לאורך המקום הגיאומטרי, אז כדאי לבדוק אם יכולה להועיל הוספת רדיוס המעגל אל קבוצת הנעלמים שעבורם צריך להרכיב את מערכת המשוואות. לפעמים הוספה כזו ו/או שימוש בתכונות של אורכי קטעים מאפשרים למצוא את הפתרון בלי להתבונן בשיעורים של כמה נקודות המשפיעות על מיקומה של נקודה P . אם לקבוצת הנעלמים מוסיפים פחות איברים מאשר מוציאים ממנה, אז יש להרכיב פחות משוואות כדי לפתור את הבעיה. אל תשכחו שמספר המשוואות במערכת שבעזרתה נפתור את הבעיה צריך להיות (בדרך כלל) קטן ב-1 ממספר נעלמים.

בעיה. מצאו את המקום הגיאומטרי של מרכזי המעגלים המשיקים מבחוץ למעגל $x^2 + y^2 = R^2$ וגם משיקים לישר $y = 2R$.

דרך החשיבה ופתרון.

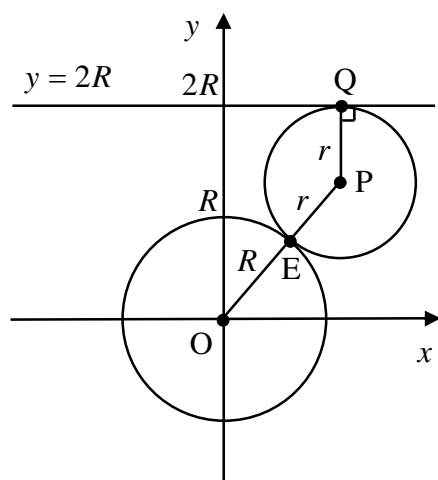
מה צריך למצוא?

צריך למצוא את המקום הגיאומטרי של מרכזי המעגלים המשיקים מבחוץ למעגל

$x^2 + y^2 = R^2$ וגם משיקים לישר $y = 2R$.

נסמן ב- P נקודה שרירותית השייכת למקום גיאומטרי זה.

אילו היינו מנסים לפתור את הבעיה בדרך דומה לדרך שבה פתרנו את הבעיות בפרקים 25-28, היינו שואלים את עצמנו: מיקומן של אילו נקודות קובע את מיקום הנקודה P באופן חד-משמעי? נוסף על שיעורי x_P ו- y_P הנקודה P , בשיעורים של אילו עוד נקודות עלינו להתבונן? היינו עונים על השאלה הראשונה כך: מיקומם



של מרכז המעגל הנתון O , של נקודת ההשקה של שני המעגלים E ושל נקודת ההשקה Q של המעגל שמרכזו בנקודה P ושל הישר $y = 2R$ קובע חד-משמעית את המיקום של נקודה P .

לאחר מכן היינו מנסים להרכיב מערכת של שבע משוואות עם שמונת הנעלמים הבאים:
 $x_Q, y_Q, x_E, y_E, x_O, y_O, x_P, y_P$ – או (מכיוון שהשיעורים של נקודה O ידועים) –
 $x_Q, y_Q, x_E, y_E, x_P, y_P$: ששת הנעלמים הבאים:
 לא נפתור את הבעיה בדרך זו. לא ננסה להרכיב מערכת של שבע משוואות עם שמונת הנעלמים הנ"ל. נעשה משהו אחר. קודם כל נוסיף אל קבוצת הנעלמים האחרונה את הרדיוס r של המעגל שמרכזו בנקודה P (ואשר משיק למעגל הנתון מבחוץ וגם משיק לישר $y = 2R$). לאחר מכן ננסה להוציא מקבוצת הנעלמים החדשה חלק מאיבריה, ולהרכיב מערכת שבה כמה משוואות עם שאר הנעלמים. בין הנעלמים במערכת משוואות זו צריכים להיות x_P, y_P ו- r . מספר המשוואות במערכת צריך להיות קטן ב-1 ממספר נעלמים. אולי נוכל אפילו להרכיב מערכת של שתי משוואות אך ורק עם הנעלמים x_P, y_P ו- r .

כדי להרכיב אחת מהמשוואות של מערכת זו ננסה להביע את האורך של קטע המרכזים OP באמצעות שלושה נעלמים אלו בשתי דרכים שונות.
 הבה ניעזר קודם בכך שנקודת ההשקה E של שני המעגלים נמצאת בתוך הקטע OP , ולכן

$$OP = OE + EP$$

מהשוויון האחרון ומהשוויונים

$$OE = R, \quad EP = r$$

נובע כי

$$OP = R + r \quad (1)$$

כעת בעזרת הנוסחה לחישוב מרחק בין שתי נקודות נקבל:

$$OP = \sqrt{(x_P - 0)^2 + (y_P - 0)^2} = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} \quad (2)$$

על סמך שורות (1), (2) וכלל המעבר, נקבל את המשוואה הבאה עם הנעלמים x_p, y_p ו- r :

$$R + r = \sqrt{x_p^2 + y_p^2} \quad (3)$$

כעת ננסה להביע באמצעות x_p, y_p, r ואולי באמצעות עוד מהנעלמים הנ"ל את האורך של הקטע PQ בשתי דרכים שונות.

קודם ניעזר בכך שהקטע PQ הוא רדיוס המעגל שמרכזו בנקודה P , ונקבל :

$$PQ = r \quad (4)$$

לאחר מכן נשים לב כי מתקיים :

$$y_Q = 2R \quad (5)$$

-ו

$$x_Q = x_P \quad (6)$$

שוויון (5) מתקיים כי הנקודה Q נמצאת על הישר $y = 2R$. שוויון (6) מתקיים כי הישר

PQ מאונך לציר ה- x [מכיוון שהוא מאונך לישר $y = 2R$ (לפי המשפט : **הזווית בין**

משיק למעגל לבין רדיוס, הנפגשים בנקודת ההשקה, היא זווית ישרה)], אשר מקביל לציר ה- x].

על סמך שוויונים (5) ו-(6) אפשר להסיק כי

$$PQ = |2R - y_p| \quad (7)$$

מעגל שמרכזו מעל ישר $y = 2R$ ואשר משיק לישר זה לא יכול להשיק למעגל אשר נמצא כולו מתחת לישר זה. ועוד, מרכז המעגל המשיק לישר לא יכול להימצא על ישר זה. לכן מתקיים :

$$2R - y_p > 0 \quad (8)$$

משוויון (7) ומאי-שוויון (8) נובע כי

$$PQ = 2R - y_p \quad (9)$$

על סמך שוויונים (4) ו-(9) ועל סמך כלל המעבר מקבלים את המשוואה הבאה :

$$r = 2R - y_p \quad (10)$$

כעת נוכל להתבונן במערכת הבאה :

$$\begin{cases} R + r = \sqrt{x_p^2 + y_p^2} \\ r = 2R - y_p \end{cases}$$

המורכבת ממשוואות (3) ו-(10). זאת מערכת של שתי משוואות עם שלושה הנעלמים

הבאים : x_p, y_p ו- r .

על סמך מערכת זו עלינו לקבל משוואה עם הנעלמים x_p ו- y_p .

נציב במשוואה הראשונה של המערכת האחרונה לפי המשוואה השנייה, ונקבל את

המשוואה הבאה :

$$3R - y_p = \sqrt{x_p^2 + y_p^2} \quad (11)$$

נעלה את שני האגפים של המשוואה האחרונה בריבוע, ונקבל :

$$9R^2 - 6Ry_p + y_p^2 = x_p^2 + y_p^2$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה הבאה :

$$y_p = \frac{3}{2}R - \frac{1}{6R}x_p^2 \quad (12)$$

האם משוואה (12) שקולה למשוואה (11)? הבה נבדוק.

אם זוג מספרים סדור כלשהו מקיים את משוואה (11), אז הוא מקיים את משוואה (12).

האם גם ההפך נכון?

הבה נברר. אם זוג מספרים סדור כלשהו מקיים את משוואה (12), אז הוא מקיים

את משוואה (11) או את המשוואה הבאה :

$$-3R + y_p = \sqrt{x_p^2 + y_p^2} \quad (13)$$

האגף השמאלי של המשוואה האחרונה לא יכול להיות שלילי, כי האגף הימני של משוואה

זו לא יכול להיות שלילי. לכן ערך הנעלם y_p שעבורו מתקיימת משוואה (13) לא יכול

להיות קטן מ- $3R$. עם זאת, הערך של הנעלם y_p שעבורו מתקיימת משוואה (12) לא יכול

להיות גדול מ- $\frac{3}{2}R$. מכאן, אם עבור זוג מספרים סדור כלשהו משוואה (12) מתקיימת, אז

עבורו משוואה (13) לא מתקיימת. מנאמר לעיל נובע שאם משוואה (12) מתקיימת עבור זוג מספרים סדור כלשהו, אז משוואה (11) מתקיימת עבורו גם כן. קיבלנו כי

משוואה (11) שקולה למשוואה (12).

מנאמר לעיל נובע כי

המקום הגיאומטרי המדובר הוא הפרבולה המיוצגת על ידי המשוואה $y = \frac{3}{2}R - \frac{1}{6R}x^2$

הערה. המרחק בין נקודה P לישר $y = 2R$ שווה, לפי הגדרת המרחק בין נקודה לישר, לאורך האנך PQ המורד לישר זה. לכן יכולנו לקבל את שוויון (7) בעזרת הנוסחה לחישוב מרחק בין נקודה לישר. נזכיר כי אפשר לחשב מרחק d בין נקודה (x_1, y_1) לישר $l: ax + by + c = 0$ לפי הנוסחה הבאה:

$$d = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

בעזרת נוסחה זו נקבל:

$$PQ = \frac{|0 \cdot x_p + 1 \cdot y_p - 2R|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = |y_p - 2R| = |2R - y_p|$$

(לחישוב המרחק בין הנקודה P לישר $y = 2R$ השתמשנו במשוואה הבאה של ישר זה: $0 \cdot x + 1 \cdot y - 2R = 0$).

נציין שלפעמים שימוש בנוסחה לחישוב מרחק בין נקודה לישר מאפשר להקטין את מספר הנעלמים שעבורם צריך להרכיב את המערכת שבעזרתה אפשר יהיה למצוא את המשוואה של המקום הגיאומטרי.

חלק ב': לחכם די בשתי מילים¹

אשתי, רופאת ילדים, שאלה את אחד ממטופליה, תלמיד כיתה א': "איזה שיעור אהוב עליך ביותר?"
 "השיעור האחרון", השיב הילד.

"הפסק לעזור לשכנה שלך," ביקשתי מתלמיד בשיעור, "ככל שתסביר לה פחות היא תבין יותר."

¹ טיטוס מאקיוס פלאוטוס

בעיה 1. הבסיס BC של משולש שווה שוקיים ABC נמצא על ישר שמשוואתו $y = \frac{1}{4}x + 1$; קודקוד A של המשולש נמצא בנקודה $(7, 7)$; המרחק מנקודה B לציר ה- y גדול פי שניים ממרחקה מציר ה- x . מצאו את השיעורים של נקודה C .

עקרונות הפתרון.

על סמך הנתון בבעיה עליכם להסיק כי נקודה B היא נקודת החיתוך של הישר שמשוואתו

$$y = \frac{1}{4}x + 1 \text{ עם הישר שמשוואתו } y = \frac{1}{2}x \text{ או } y = -\frac{1}{2}x.$$

לאחר מכן עליכם למצוא את השיעורים של נקודה B . עליכם לקבל: $B(4, 2)$ או

$$B(-1\frac{1}{3}, \frac{2}{3}).$$

מכאן אפשר להמשיך בשלוש הדרכים הבאות.

המשך א'.

מצאו את משוואת הישר העובר דרך הנקודה $A(7, 7)$ ומאונך לישר BC ; לאחר מכן מצאו את נקודת החיתוך של שני הישרים. עליכם לקבל כי הישרים נחתכים בנקודה $(8, 3)$. הנקודה האחרונה היא אמצע הצלע BC . לכן תוכלו למצוא את השיעורים של נקודה C בעזרת הנוסחאות לשיעורים של אמצע הקטע.

$$\text{תשובה: } C(12, 4) \text{ או } C(17\frac{1}{3}, 5\frac{1}{3}).$$

המשך ב'.

מצאו את משוואת המעגל שמרכזו הנקודה A ואשר עובר דרך נקודה B . מצאו את נקודות החיתוך של המעגל האחרון עם הישר BC . אחת משתי נקודות אלו צריכה להיות הנקודה B . נקודת החיתוך השנייה היא נקודה C .

המשך ג'.

מצאו את השיפוע של הישר AB . לאחר מכן מצאו את השיפוע של הישר AC בהסתמך על השוויון הבא:

$$\frac{m_{AC} - m_{BC}}{1 + m_{AC} \cdot m_{BC}} = - \frac{m_{AB} - m_{BC}}{1 + m_{AB} \cdot m_{BC}}$$

(ראו פרקים 10 ו-11).

לאחר שמצאתם את השיפוע של הישר AC , מצאו את המשוואה של ישר זה. לאחר מכן תוכלו למצוא את השיעורים של הנקודה C כשיעורי נקודת החיתוך של הישרים AC ו- BC .

בעיה 2. נתון משולש. אמצעי צלעות המשולש הם בנקודות $O(0,0)$, $P(1,3)$ ו- $Q(-3,1)$.

(א) מצאו את השיעורים של נקודת מפגש התיכונים במשולש.

(ב) הוכיחו כי המשולש הוא שווה שוקיים, אך לא שווה צלעות.

(ג) הוכיחו כי המשולש הוא ישר זווית.

עקרונות הפתרון.

(א) סמנו את קודקודי המשולש הנתון באופן הבא: ב- A סמנו את הקודקוד שמול הצלע שעליה נמצאת הנקודה $O(0,0)$, ב- B - את הקודקוד שמול הצלע שעליה נמצאת הנקודה $P(1,3)$, וב- C - את הקודקוד שמול הצלע שעליה נמצאת הנקודה $Q(-3,1)$. בעזרת הנוסחאות לשיעורי אמצע הקטע תקבלו את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} = -3 \\ \frac{x_B + x_C}{2} = 0 \\ \frac{x_A + x_C}{2} = 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

וגם את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} \frac{y_A + y_B}{2} = 1 \\ \frac{y_B + y_C}{2} = 0 \\ \frac{y_A + y_C}{2} = 3 \end{cases} \quad (2.2)$$

הכפילו כל משוואה של מערכת (2.1) ב-2, ותקבלו את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} x_A + x_B = -6 \\ x_B + x_C = 0 \\ x_A + x_C = 2 \end{cases}$$

אם תחסרו מהמשוואה השלישית של המערכת האחרונה את המשוואה הראשונה שלה, ובמערכת אשר תקבל תחברו אל המשוואה השלישית את המשוואה השנייה - עליכם לקבל את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} x_A + x_B = -6 \\ x_B + x_C = 0 \\ 2x_C = 8 \end{cases}$$

פתרו את המערכת האחרונה ולאחר מכן את מערכת (2.2). עליכם לקבל:

$$A(-2, 4), B(-4, -2), C(4, 2)$$

סמנו ב- M את השיעורים של נקודת מפגש ההתיכונים במשולש ABC . תקבלו את השוויונים הבאים:

$$x_M = \frac{x_A + 2x_O}{3}, \quad y_M = \frac{y_A + 2y_O}{3}$$

בעזרת שני השוויונים האחרונים חשבו את שיעורי הנקודה M . עליכם לקבל:

$$M\left(-\frac{2}{3}, 1\frac{1}{3}\right)$$

(ב) על מנת להראות כי המשולש ABC הוא שווה שוקיים אך לא שווה צלעות, חשבו את אורכי הצלעות של המשולש. עליכם לקבל כי

$$AB = AC < BC$$

(ג) אפשר לפתור את הבעיה בעזרת משפט הפוך למשפט פיתגורס.

כדי להוכיח את השוויון $BC^2 = AB^2 + AC^2$ תוכלו להיעזר באורכי הצלעות של המשולש, אשר תקבלו כאשר תפתרו את סעיף ב' של הבעיה.

דרך נוספת לפתרון סעיף ג' של הבעיה היא לחשב את השיפוע m_{AB} של הישר AB , את השיפוע m_{AC} של הישר AC ולהראות כי מתקיים:

$$m_{AB} \cdot m_{AC} = -1$$

אם תפתרו בדרך האחרונה את סעיף ג' לפני שתפתרו את סעיף ב' של הבעיה, אז כדי לפתור לאחר מכן את סעיף ב' לא יהיה צורך לחשב את אורך הקטע BC .

בעיה 3. נתונות הנקודות $A(-2, 2)$ ו- $B(8, -2)$. מצאו את השיעורים של הנקודה C

הנמצאת על הישר שמשוואתו $y = \frac{1}{2}x + 3$ אם נתון כי נקודת מפגש התיכונים במשולש

ABC נמצאת על ישר שמשוואתו $x - 2y = 0$.

עקרונות הפתרון.

נסמן ב- M את אמצע הקטע AB וב- N את נקודת מפגש התיכונים במשולש ABC .

מצאו את השיעורים של נקודה M . עליכם לקבל: $M(3, 0)$.

הרכיבו מערכת של ארבע משוואות עם ארבעה הנעלמים הבאים: x_C, y_C, x_N, y_N .

להרכבת שתי משוואות היעזרו בכך שנקודה נמצאת על קו מסוים אך ורק אם היא

מקיימת את משוואתו. להרכבת שתי משוואות נוספות היעזרו במשפט שלפיו: **כל שני**

תיכונים במשולש מחלקים זה את זה לשני קטעים, כך שהקטע הקרוב לקודקוד גדול פי

שניים מהקטע הקרוב לצלע. עליכם לקבל את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} y_C = \frac{1}{2}x_C + 3 \\ x_N - 2y_N = 0 \\ x_N = \frac{x_C + 2 \cdot 3}{3} \\ y_N = \frac{y_C + 2 \cdot 0}{3} \end{cases}$$

כשתפתרו את המערכת תקבלו את שיעורי הנקודות N ו- C .

תשובה: $C(6,6)$.

בעיה 4. קודקוד A של טרפז $ABCD$ ($AB \parallel CD$) נמצא בנקודה $(-2,6)$. הצלע CD של

הטרפז נמצאת על ישר שמשוואתו $8x - 15y - 28 = 0$. הנקודה $M(7\frac{1}{3}, 8)$ היא נקודת

מפגש האלכסונים של הטרפז $ABCD$. שטח הטרפז שווה ל-201 יח"ר. מצאו את

השיעורים של הנקודות B , C ו- D .

עקרונות הפתרון.

מצאו את משוואת הישר AC , ולאחר מכן את השיעורים של נקודה C כשיעורי נקודת

החיתוך של ישר זה עם הישר CD . עליכם לקבל: $C(26,12)$.

כאשר נוסף על השיעורים של נקודות A ו- M יהיו ברשותכם גם השיעורים של הנקודה

C , תוכלו למצוא את היחס $MA : CM$. לשם כך היעזרו באחד השוויונים הבאים:

$$x_M = \frac{\lambda x_A + x_C}{\lambda + 1}, \quad y_M = \frac{\lambda y_A + y_C}{\lambda + 1} \quad (4.1)$$

כאן

$$\lambda = \frac{CM}{MA}$$

עליכם לקבל כי $\lambda = 2$. מכאן אפשר להסיק כי הבסיס CD של הטרפז גדול פי שניים

מהבסיס AB שלו.

בעיה 5. במעוין $ABCD$ נקודת מפגש האלכסונים נמצאת בקודה $M(4, 4.5)$, קודקוד A נמצא על הישר $y = x + 5$, קודקוד C נמצא על הישר $y = -x + 8$ וקודקוד D על ציר ה- x . מצאו את שיעורי קודקוד B .

עקרונות הפתרון.

ראשית יש למצוא את שיעורי הנקודות A ו- C . לשם כך יש להרכיב מערכת של ארבע משוואות עם ארבעת הנעלמים הבאים: x_A, y_A, x_C, y_C . את המשוואות הראשונה והשנייה במערכת זו אפשר להרכיב בהסתמך על כך שנקודה A נמצאת על הישר $y = x + 5$, ונקודה C נמצאת על הישר $y = -x + 8$. את המשוואות השלישית והרביעית אפשר להרכיב בהסתמך על כך שהנקודה $M(4, 4.5)$ היא אמצע הקטע AC .

לאחר שתרכיבו את המערכת ותפתרו אותה עליכם לקבל כי $A(2, 7)$, $C(6, 2)$. לאחר שמוצאים את שיעורי הנקודות A ו- C , אפשר למצוא את השיפוע m_{AC} של האלכסון AC במעוין $ABCD$ (את השיפוע האחרון אפשר למצוא גם בעזרת שיעורי הנקודה M והשיעורים של אחת מהנקודות A ו- C). אחר כך אפשר למצוא את השיפוע m_{BD} של האלכסון BD במעוין הנתון בהסתמך על כך שאלכסונים במעוין מאונכים זה לזה.

כאשר תדעו את גודל השיפוע של האלכסון BD , תוכלו למצוא את המשוואה של אלכסון זה בעזרת השיפוע שלו ושיעורי הנקודה M . לאחר מכן מצאו את שיעורי הנקודה D בהסתמך על כך שהיא נקודת החיתוך של הישר BD עם ציר ה- x . עליכם לקבל כי $D(-1.625, 0)$.

לאחר שתמצאו את השיעורים של נקודה D תוכלו למצוא את השיעורים של נקודה B בהסתמך על כך שהנקודה $M(4, 4.5)$ היא אמצע הקטע BD . **תשובה:** $B(9.625, 9)$.

בעיה 6. נתון מעוין $ABCD$. קודקוד A של המעוין נמצא בנקודה $(2, 4)$; אחד מאלכסוני המעוין נמצא על הישר $y = x - 4$. שטח המעוין שווה ל-24 יח"ר. מצאו את שיעורי הנקודות B, C ו- D .

עקרונות הפתרון.

ראשית יש להראות כי הנקודה $A(2, 4)$ לא נמצאת על הישר $y = x - 4$, ומכאן להסיק שעל ישר זה נמצא אלכסון BD של המעוין $ABCD$.
אלכסונים במעוין חוצים זה את זה ומאונכים זה לזה. לכן נקודה C היא נקודה סימטרית לנקודה A ביחס לישר BD .

כדי למצוא את השיעורים של נקודה C צריך למצוא קודם את משוואת הישר AC . את משוואה זו אפשר למצוא בהסתמך על כך שהוא עובר דרך הנקודה $A(2, 4)$ ומאונך לישר BD . לאחר מכן תוכלו למצוא את נקודת מפגש אלכסוני המעוין $ABCD$. עליכם לקבל כי אלכסוני המעוין נפגשים בנקודה $M(5, 1)$. לאחר מכן תוכלו למצוא את שיעורי נקודה C בהסתמך על כך שנקודה M היא אמצע הקטע AC . עליכם לקבל כי $C(8, -2)$.
 כדי למצוא את שיעורי הנקודות B ו- D צריך למצוא את אורך הקטע BD .
 אפשר לעשות זאת בהסתמך על השוויון הבא עבור השטח S_{ABCD} של המעוין $ABCD$:

$$S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2}$$

על מנת שתוכלו לחשב בעזרת שוויון זה את אורך הקטע BD , עליכם לחשב קודם את אורך הקטע AC .
 עליכם לקבל:

$$BD = 4\sqrt{2} \text{ יח'}$$

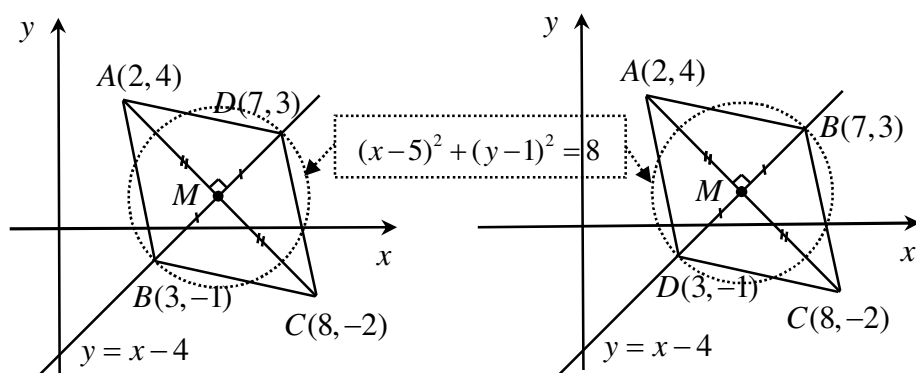
מתוצאה זו ומהשוויון

$$BM = MD$$

נובע כי

$$BM = MD = 2\sqrt{2} \text{ יח'}$$

לאחר שתקבלו שוויונים אלו תוכלו למצוא את שיעורי הנקודות B ו- D כנקודות החיתוך של הישר $\ell_{BD}: y = x - 4$ עם המעגל שמרכזו $M(5,1)$ ורדיוסו $2\sqrt{2}$ יח' (במקום להתבונן במעגל האחרון אפשר להיעזר בנוסחה לחישוב מרחק בין שתי נקודות). עליכם לקבל: $D(7,3)$, $B(3,-1)$ או $D(3,-1)$, $B(7,3)$.

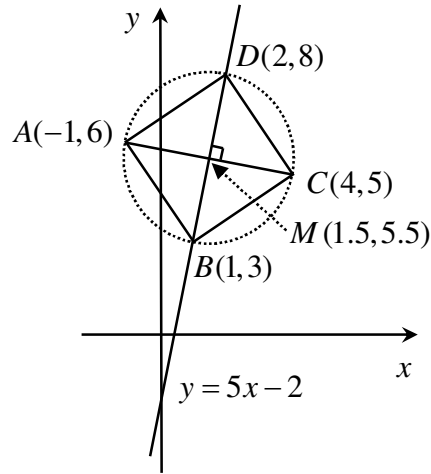
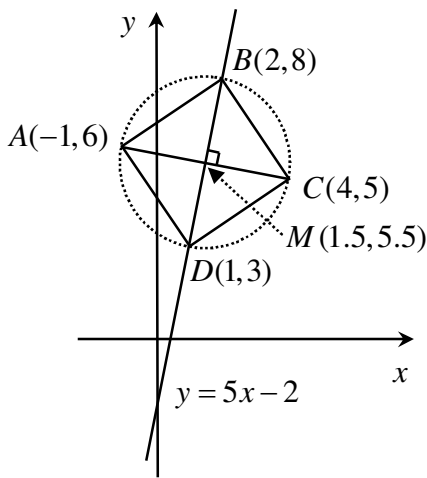


בעיה 7. נתון ריבוע $ABCD$. קודקוד A של הריבוע נמצא בנקודה $(-1,6)$; אחד מאלכסוני הריבוע נמצא על הישר $y = 5x - 2$. מצאו את שיעורי הנקודות B , C ו- D .

עקרונות הפתרון.

כמו בבעיה הקודמת, ראשית יש להראות שהאלכסון של הריבוע $ABCD$ שנמצא על הישר $y = 5x - 2$ הוא האלכסון BD . לאחר מכן צריך למצוא את השיעורים של נקודת מפגש אלכסוני הריבוע ושל הנקודה C בדרך שבה הוצע למצוא את שיעורי הנקודה C בבעיה הקודמת.

עליכם לקבל כי אלכסוני הריבוע נפגשים בנקודה $M(1.5, 5.5)$ וכי $C(4,5)$. לאחר מכן אפשר למצוא את השיעורים של נקודות B ו- D כנקודות החיתוך של הישר BD עם מעגל שמרכזו $M(1.5, 5.5)$ ואשר עובר דרך נקודה $A(-1,6)$. עליכם לקבל כי $D(2,8)$, $B(1,3)$ או $D(1,3)$, $B(2,8)$.



בעיה 8. קודקוד A של ריבוע $ABCD$ נמצא בנקודה $(2, 4)$; קודקוד B של הריבוע נמצא בנקודה $(5, 8)$. מצאו את השיעורים של נקודות C ו- D .

עקרונות פתרון א'.

ננסה להרכיב מערכת של שתי משוואות עם הנעלמים x_D ו- y_D .

נשאל את עצמנו: אילו תנאים נקודה D חייבת לקיים?

נקודה D חייבת לקיים את שני התנאים הבאים:

$$\angle BAD = 90^\circ \quad (r_1)$$

$$AD = AB \quad (r_2)$$

תנאי r_1 מתקיים אך ורק אם מתקיים:

$$m_{AB} \cdot m_{AD} = -1$$

בהסתמך על השוויון האחרון תקבלו את המשוואה הבאה:

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{y_D - 4}{x_D - 2} = -1 \quad (8.1)$$

לאחר מכן חשבו את אורך הקטע AB . עליכם לקבל:

$$AB = 5 \quad (8.2)$$

בהסתמך על השוויון האחרון תקבלו כי תנאי r_2 מתקיים אך ורק אם מתקיים:

$$\sqrt{(x_D - 2)^2 + (y_D - 4)^2} = 5 \quad (8.3)$$

פתרו את המערכת המורכבת ממשוואות (8.1) ו-(8.3). עליכם לקבל:

$$D(-2, 7) \text{ או } D(6, 1)$$

אחר כך מצאו את שיעורי נקודה C בעזרת הנוסחאות לשיעורים של אמצע קטע. עליכם לקבל שאם קודקוד D של הריבוע נמצא בנקודה $(6, 1)$, אז קודקודו C נמצא בנקודה $(9, 5)$; ואם קודקוד D של הריבוע נמצא בנקודה $(-2, 7)$, אז קודקודו C נמצא בנקודה $(1, 11)$.

עקרונות פתרון ב'.

נמצא את שיעורי הנקודה D כנקודה משותפת למקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור המקיימות את תנאי r_1 ולמקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור המקיימות את תנאי r_2 .

מהו המקום הגיאומטרי הראשון הנ"ל?

מקום גיאומטרי זה הוא הישר ℓ (להוציא הנקודה A) המקיים את שני התנאים הבאים: (א) הישר ℓ עובר דרך נקודה A , (ב) הישר ℓ מאונך לישר AB . מצאו את המשוואה של הישר ℓ . עליכם לקבל כי

$$\ell: y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{2}$$

ומהו המקום הגיאומטרי השני הנ"ל?

בהסתמך על שוויון (8.2) אפשר לקבל כי מקום גיאומטרי זה הוא המעגל שמשוואתו

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

הראו כי הישר ℓ והמעגל האחרון נחתכים בנקודות $(6,1)$ ו- $(-2,7)$. הסיקו מכאן כי

$$D(6,1) \text{ או } D(-2,7).$$

מצאו את שיעורי הנקודה C בדרך המתוארת לעיל.

בעיה 9. קודקוד A של ריבוע $ABCD$ נמצא בנקודה $(-1,1)$; קודקוד C של הריבוע נמצא בנקודה $(6,2)$. מצאו את השיעורים של הנקודות B ו- D .

עקרונות הפתרון.

מצאו את השיעורים של הנקודות B ו- D כשיעורי נקודות החיתוך של האנך האמצעי לקטע AC ושל המעגל שהקטע הוא קוטרו.
תשובה: $B(2,5)$, $D(3,-2)$ או $B(3,-2)$, $D(2,5)$.

בעיה 10. הוכיחו כי הישר שמשוואתו $y = 3x - 2$ חותך את הקטע המחבר את הנקודות $A(1,4)$ ו- $B(2,3)$.

עקרונות הפתרון.

הוכיחו כי אחת משתי הנקודות הנתונות נמצאת מתחת לישר הנתון, ואילו הנקודה השנייה נמצאת מעל ישר זה.

בעיה 11. הצלע AB של מעוין $ABCD$ נמצאת על ישר שמשוואתו $y = 0.75x + 2.25$. אורך הצלע הוא 5 יח'. נקודות A ו- D נמצאות ברביע הראשון. המרחק בין נקודה A לראשית הצירים שווה ל- $\sqrt{10}$ יח'. הנקודה $E(3,5)$ נמצאת בתוך המעוין. גובה המעוין שווה ל-1.4 יח'. מצאו את המשוואות של הישרים AD , BC ו- CD .

עקרונות הפתרון.

נקודה A נמצאת ברביע הראשון, והיא נקודת החיתוך של הישר שמשוואתו

$$y = 0.75x + 2.25 \text{ עם המעגל שמרכזו ראשית הצירים ורדיוסו } \sqrt{10} \text{ יח'}. \quad (1)$$

הראו ששני הקווים נחתכים בנקודות $(1, 3)$ ו- $(-3.16, -0.12)$. בהסתמך על הנאמר לעיל הסיקו כי $A(1, 3)$.

בהסתמך על הנתון בבעיה הסיקו כי הישר CD מקביל לישר AB ונמצא במרחק של

1.4 יח' ממנו. קבלו את המשוואה הכללית הבאה של הישר AB :

$$-3x + 4y - 9 = 0 \quad (11.1)$$

בהסתמך על משוואה זו ועל הנאמר לעיל על הישר CD , קבלו את המשוואה הבאה של הישר האחרון:

$$-3x + 4y + c = 0$$

ורשמו שכאן c הוא מספר המקיים את השוויון הבא:

$$\frac{|c + 9|}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = 1.4$$

קבלו מכאן כי משוואת הישר CD היא:

$$-3x + 4y - 2 = 0 \text{ או } -3x + 4y - 16 = 0 \quad (11.2)$$

הנקודה $E(3, 5)$ נמצאת בין הישרים AB ו- CD , כלומר היא נמצאת מתחת לאחד מהם

ומעל השני. הראו כי הנקודה $E(3, 5)$ נמצאת מעל הישר AB . לשם כך הציבו את שיעורי

הנקודה באגף השמאלי של משוואה (11.1). עליכם לקבל מספר חיובי. לאחר מכן הציבו את

שיעורי הנקודה באגף השמאלי של כל אחת מהמשוואות הרשומות בשורה (11.2).

כאשר תציבו את שיעורי נקודה E באגף השמאלי של המשוואה $-3x + 4y - 2 = 0$

תקבלו מספר חיובי. מכאן עליכם להסיק כי נקודה E נמצאת מעל הישר שמשוואתו

$$-3x + 4y - 2 = 0.$$

כאשר תציבו את שיעורי נקודה E באגף השמאלי של המשוואה $-3x + 4y - 16 = 0$ תקבלו מספר שלילי. מכאן עליכם להסיק כי נקודה E נמצאת מתחת לישר שמשוואתו $-3x + 4y - 16 = 0$.

על סמך התוצאות עליכם להסיק כי המשוואה הבאה היא משוואה כללית של הישר CD :

$$-3x + 4y - 16 = 0 \quad (11.3)$$

אילו כאשר הייתם מציבים את השיעורים של נקודה E באגף שמאלי של המשוואה האחרונה הייתם מקבלים מספר חיובי, אז הייתם חייבים להסיק כי לבעיה אין פתרון. נקודה D נמצאת ברביע הראשון, והיא נקודת החיתוך של הישר CD עם המעגל שמרכזו הוא הנקודה $A(1, 3)$ ורדיוסו 5 יח'. פתרו את המערכת המורכבת ממשוואת המעגל האחרון וממשוואה (11.3) של הישר CD . אתם חייבים לקבל את זוגות המספרים הבאים: $(4, 7)$ ו- $(1.24, -3.68)$. בהסתמך על הנאמר לעיל הסיקו כי $D(4, 7)$. לאחר שתגיעו לתוצאה זו תוכלו למצוא את משוואת הישר AD . המשוואה הבאה היא המשוואה מפורשת של הישר האחרון:

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$$

הישר BC מקביל לישר AD ונמצא במרחק של 1.4 יח' ממנו. קבלו את המשוואה הכללית הבאה של הישר AD :

$$-4x + 3y - 5 = 0$$

בהסתמך על משוואה זו ועל הנאמר לעיל על הישר BC , קבלו את המשוואה הבאה של הישר האחרון:

$$-4x + 3y + c = 0$$

ורשמו שכאן c הוא מספר המקיים את השוויון הבא:

$$\frac{|c + 5|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = 1.4$$

קבלו מכאן כי משוואת הישר BC היא:

$$-4x + 3y - 12 = 0 \text{ או } -4x + 3y + 2 = 0$$

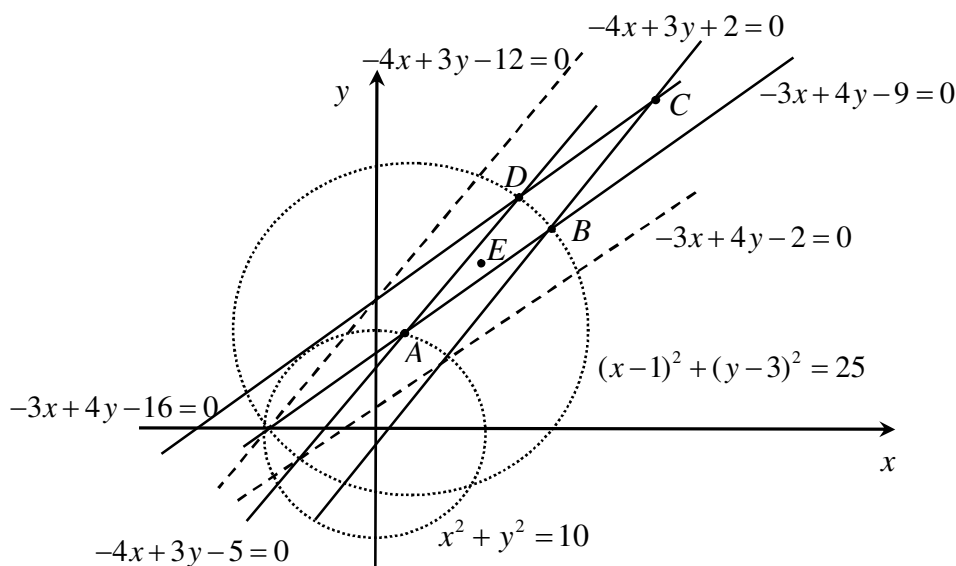
הנקודה $E(3,5)$ נמצאת בין הישרים AD ו- BC , כלומר היא נמצאת מתחת לאחד

מהם ומעל השני. הראו כי הנקודה $E(3,5)$ נמצאת מתחת לישר AD .

לאחר מכן הראו כי נקודה E נמצאת מתחת לישר שמשוואתו $-4x + 3y - 12 = 0$ ומעל

הישר שמשוואתו $-4x + 3y + 2 = 0$. מכאן הסיקו כי המשוואה $-4x + 3y + 2 = 0$

מייצגת את הישר BC .



בעיה 12. בריבוע $ABCD$ קודקוד A נמצא בנקודה $(3,7)$, קודקוד B נמצא על ציר ה- y

וקודקוד C על ציר ה- x . מצאו את השיעורים של הקודקודים A, B, C, D .

עקרונות הפתרון.

הצלע AB של הריבוע $ABCD$ לא מאונכת לציר ה- x . (למה?) לכן לישר AB יש שיפוע.

הישר AB עובר דרך הנקודה $(3, 7)$. לכן אם נסמן את השיפוע של הישר AB ב- m , נגיע למשוואה הבאה של ישר זה:

$$y - 7 = m(x - 3)$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה הבאה:

$$y = mx - 3m + 7 \quad (12.1)$$

נקודה B היא נקודת החיתוך של הישר AB עם ציר ה- y . מכאן ומהמשוואה (12.1) נובע כי

$$x_B = 0, \quad y_B = -3m + 7 \quad (12.2)$$

מתקיים:

$$m \neq 0$$

וגם

$$AB \perp BC$$

(למה?)

לכן

$$m_{BC} = -\frac{1}{m} \quad (12.3)$$

על סמך שורות (12.2) ו-(12.3) מקבלים את המשוואה הבאה של הישר BC :

$$y + 3m - 7 = -\frac{1}{m}(x - 0)$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה הבאה:

$$x = -my - 3m^2 + 7m \quad (12.4)$$

נקודה C היא נקודת החיתוך של ישר BC עם ציר ה- x . מכאן וממשוואה (12.4) נובע

כי

$$x_C = -3m^2 + 7m, \quad y_C = 0 \quad (12.5)$$

כעת אפשר להביע באמצעות m את אורך הקטע AB וגם את אורך הקטע BC . אם ניעזר לאחר מכן בשוויון $AB = BC$, נקבל משוואה עם נעלם m . קבלו אותה בעצמכם. עליכם לקבל את המשוואה הבאה:

$$\sqrt{9+9m^2} = \sqrt{(-3m+7)^2 + (-3m^2+7m)^2}$$

נפתור אותה:

$$\sqrt{9+9m^2} = \sqrt{(-3m+7)^2 + (-3m^2+7m)^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$9(m^2+1) = (-3m+7)^2 + (-3m^2+7m)^2$$

$$\Updownarrow$$

$$9(m^2+1) = (3m-7)^2(m^2+1)$$

$$\Updownarrow$$

$$(3m-7)^2(m^2+1) - 9(m^2+1) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(m^2+1)[(3m-7)^2 - 3^2] = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(m^2+1)(3m-7-3)(3m-7+3) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(m^2+1)(3m-10)(3m-4) = 0$$

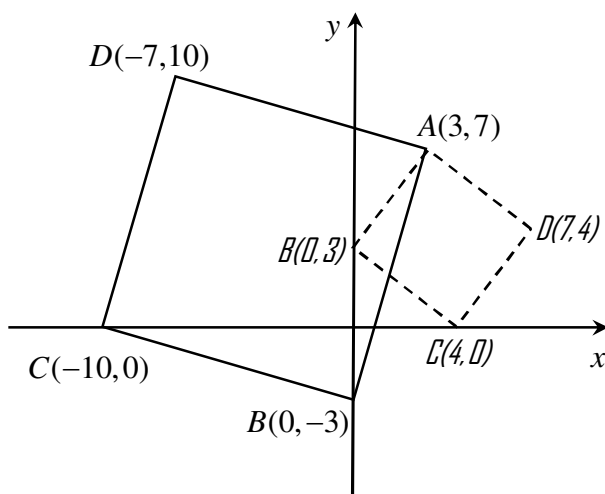
מכאן

$$m = \frac{4}{3} \quad \text{או} \quad m = \frac{10}{3} \quad (12.6)$$

כעת על סמך שורות (12.2), (12.5) ו-(12.6) אפשר לקבל את השיעורים של נקודות B ו- C .

לאחר מכן אפשר למצוא את השיעורים של נקודה D בעזרת נוסחאות לשיעורי אמצע קטע.

תשובה: $D(7,4)$, $C(4,0)$, $B(0,3)$ או $D(-7,10)$, $C(-10,0)$, $B(0,-3)$.



הערה. אפשר להרכיב משוואה עם נעלם m גם בהסתמך על כך שהאלכסונים בריבוע חוצים זה את זה ומאונכים זה לזה.

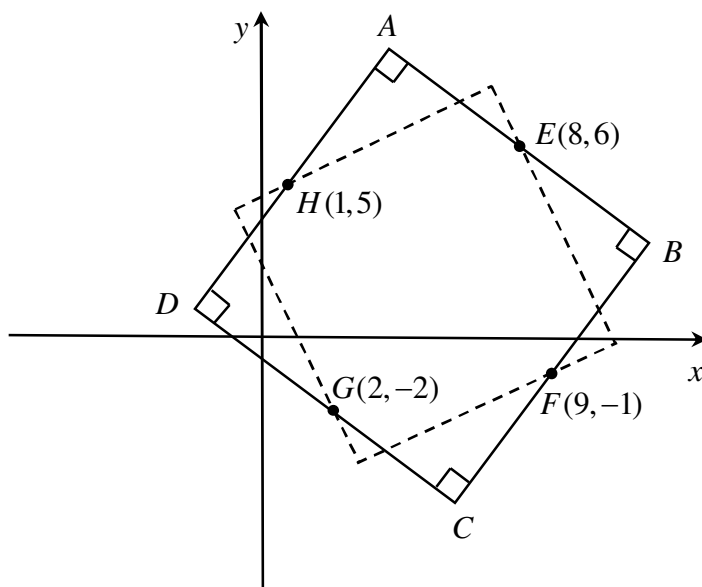
בעיה 13. נתון מלבן $ABCD$. הישר AB עובר דרך נקודה $E(8,6)$; הישר BC עובר דרך נקודה $F(9,-1)$; הישר CD עובר דרך נקודה $G(2,-2)$; הישר AD עובר דרך נקודה $H(1,5)$; צלעות המלבן לא מקבילות לצירי השיעורים.

(א) הוכיחו כי המלבן $ABCD$ הוא ריבוע.

(ב) גם נתון: 10 יח' AB . מצאו את השיעורים של קודקודי הריבוע $ABCD$.

עקרונות הפתרון לסעיף א'.

עליכם להוכיח כי שתי צלעות סמוכות במלבן הנתון שוות זו לזו.



סמנו את השיפוע של הישר AB ב- m , ופעלו בדרך הבאה:

(א) קבלו את המשוואה הבאה של הישר AB :

$$y - 6 = m(x - 8)$$

ולאחר מכן את המשוואה הבאה של ישר זה:

$$-mx + y + 8m - 6 = 0 \quad (13.1)$$

(ב) קבלו את המשוואה הבאה של הישר CD :

$$y + 2 = m(x - 2)$$

ולאחר מכן את המשוואה הבאה של ישר זה:

$$-mx + y + 2m + 2 = 0 \quad (13.2)$$

ג) קבלו את המשוואה הבאה של הישר BC :

$$y + 1 = -\frac{1}{m}(x - 9)$$

ולאחר מכן את המשוואה הבאה של ישר זה :

$$x + my + m - 9 = 0 \quad (13.3)$$

ד) קבלו את המשוואה הבאה של הישר AD :

$$y - 5 = -\frac{1}{m}(x - 1)$$

ולאחר מכן את המשוואה הבאה של ישר זה :

$$x + my - 5m - 1 = 0 \quad (13.4)$$

ה) המרחק בין הישרים AB ו- CD שווה לאורך הקטע BC , אך כדי לחשב את המרחק בין הישרים AB ו- CD אפשר גם להיעזר בנוסחה הבאה לחישוב מרחק d בין הישרים

$$ax + by + c_1 = 0 \text{ ו- } ax + by + c_2 = 0 :$$

$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (13.5)$$

בעזרת נוסחה זו ובהסתמך על משוואות (13.1) ו-(13.2) קבלו כי

$$BC = \frac{|(8m - 6) - (2m + 2)|}{\sqrt{(-m)^2 + 1^2}} = \frac{|6m - 8|}{\sqrt{m^2 + 1}} \quad (13.6)$$

ו) בהסתמך על משוואות (13.3) ו-(13.4) קבלו בעזרת נוסחה (13.5) כי

$$AB = \frac{|(m - 9) - (-5m - 1)|}{\sqrt{1^2 + m^2}} = \frac{|6m - 8|}{\sqrt{m^2 + 1}} \quad (13.7)$$

משוואות (13.6) ו-(13.7) נובע כי מתקיים :

$$AB = BC$$

מכאן המלבן הנתון הוא ריבוע.

עקרונות הפתרון לסעיף ב'.

על סמך שורה (13.7) והנתון בבעיה קבלו את המשוואה הבאה :

$$\frac{|6m-8|}{\sqrt{m^2+1}}=10$$

העלו את המשוואה האחרונה (את שני אגפיה) בריבוע. תקבלו את המשוואה הבאה :

$$\frac{(6m-8)^2}{m^2+1}=100$$

כאשר תפתרו את המשוואה האחרונה תקבלו כי שיפוע m של הישר AB (וגם השיפוע של

הישר CD) שווה ל- $-\frac{3}{4}$:

$$m = -\frac{3}{4} \quad (13.8)$$

לאחר מכן תוכלו למצוא את משוואות צלעותיו של הריבוע $ABCD$. לאחר שתקבלו את משוואות אלו, תוכלו למצוא את שיעורי הנקודות A, B, C ו- D כשיעורי נקודות החיתוך של ישרים מתאימים.

תשובה לסעיף ב' : $A(4,9), B(12,3), C(6,-5), D(-2,1)$.

הערה. אפשר להראות כי הנקודות E, F, G ו- H נמצאות על צלעות המלבן הנתון. הטענה שהנקודה $E(8,6)$ נמצאת על הצלע AB של הריבוע $ABCD$ נובע מטענה

הישר AB עובר דרך הנקודה $E(8,6)$,

המתקיימת על פי הנתון בבעיה, ומאי השוויונים הבאים :

$$x_A < x_E < x_B$$

אם ברצונכם להוכיח זאת בלי להיעזר בשיעורי הנקודות A, B, C ו- D , עליכם להוכיח כי הנקודות E ו- G נמצאות בין הישרים BC ו- AD , ואילו הנקודות F ו- H נמצאות בין הישרים AB ו- CD .

בעיה 14. מצאו את משוואת המעגל המשיק לציר ה- x והעובר דרך הנקודות $A(1, -2)$ ו- $B(-1, -4)$.

עקרונות הפתרון.

משוואת המעגל שמרכזו $M(a, b)$ ורדיוסו R היא

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

לכן הבעיה הנוכחית היא בעיה עם שלושה הנעלמים הבאים: a , b ו- R . הרכיבו שלוש משוואות עם שלושה נעלמים אלו.

את שתי המשוואות הראשונות הרכיבו בהסתמך על כך שנקודות $A(1, -2)$ ו- $B(-1, -4)$ נמצאות על המעגל הנתון.

את המשוואה השלישית הרכיבו בהסתמך על כך שהמעגל משיק לציר ה- x . הביאו בחשבון שאם מעגל משיק לציר ה- x ועובר דרך נקודה הנמצאת מתחת לציר זה, אז גם מרכז המעגל נמצא מתחת לציר ה- x .

מערכת המשוואות אשר תקבלו תהיה שקולה למערכת הבאה:

$$\begin{cases} (a-1)^2 + (b+2)^2 = R^2 \\ (a+1)^2 + (b+4)^2 = R^2 \\ R = -b \end{cases}$$

לאחר שתחסרו מהמשוואה השנייה של המערכת האחרונה את המשוואה הראשונה שלה, ובמשוואה אשר תקבל תבצעו פתיחת סוגריים וכינוס איברים דומים, תקבלו את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} (a-1)^2 + (b+2)^2 = R^2 \\ 4a + 4b + 12 = 0 \\ R = -b \end{cases}$$

המערכת האחרונה שקולה למערכת הבאה:

$$\begin{cases} (a-1)^2 + (b+2)^2 = R^2 \\ a = -b-3 \\ R = -b \end{cases}$$

כאשר תציבו במשוואה הראשונה של המערכת האחרונה לפי המשוואות השנייה והשלישית שלה, תקבלו משוואה ריבועית עם הנעלם b . כאשר תפתרו משוואה זו תקבלו:

$$b = -10 \text{ או } b = -2$$

עבור כל אחד מערכים אלו של b מצאו את a ואת R .

תשובה: $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 4$ או $(x-7)^2 + (y+10)^2 = 100$

בעיה 15. מצאו את משוואות המשיקים למעגל $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25$ המקבילים

לישר $4x + 3y = 0$.

עקרונות הפתרון א'.

מצאו את משוואת הישר העובר דרך מרכז המעגל הנתון ומאונך לישר $4x + 3y = 0$.

לאחר מכן מצאו את נקודות החיתוך של הישר האחרון עם המעגל. עליכם לקבל את שתי

הנקודות הבאות: $(5, 8)$, $(-1, 0)$. מצאו את משוואת הישר ששיפועו $-\frac{3}{4}$ ואשר עובר דרך

נקודה $(5, 8)$. לאחר מכן מצאו את משוואת הישר ששיפועו גם הוא $-\frac{3}{4}$ אך הוא עובר דרך

נקודה $(-1, 0)$. שני הישרים הם המשיקים שאת משוואותיהם התבקשתם למצוא.

תשובה: $3x + 4y - 47 = 0$, $3x + 4y + 3 = 0$.

עקרונות הפתרון ב'.

ישר ℓ משיק למעגל $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25$ ומקביל לישר $3x + 4y = 0$ אך ורק אם

הוא מקיים את שני התנאים הבאים: (א) השיפוע של ישר ℓ שווה ל- $-\frac{3}{4}$; (ב) לישר ℓ

ולמעגל הנתון יש נקודה אחת משותפת.

על סמך התנאי הראשון מסיקים כי

$$\ell: y = -\frac{3}{4}x + n$$

לישר האחרון ולמעגל הנתון יש נקודה אחת משותפת אך ורק אם למערכת הבאה יש פתרון יחיד (וליתר דיוק - שני פתרונות שווים):

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{4}x + n \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 25 \end{cases}$$

הציבו במשוואה השנייה של מערכת זו לפי המשוואה הראשונה שלה, וקבלו את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{4}x + n \\ (x-2)^2 + \left(-\frac{3}{4}x + n - 4\right)^2 = 25 \end{cases}$$

הראו כי המשוואה השנייה במערכת האחרונה שקולה למשוואה הבאה:

$$25x^2 + (32 - 24n)x + (16n^2 - 128n - 80) = 0$$

חשבו את הדיסקרימיננטה Δ של המשוואה הריבועית האחרונה. עליכם לקבל:

$$\Delta = -1024n^2 + 11264n + 9024$$

פתרו את המשוואה $\Delta = 0$. עליכם לקבל כי:

$$n = -\frac{3}{4} \quad \text{או} \quad n = \frac{47}{4}$$

מכאן תוכלו להסיק כי המשוואה של אחד המשיקים למעגל הנתון המקבילים לישר

$$3x + 4y = 0 \quad \text{היא} \quad y = -\frac{3}{4}x + \frac{47}{4} \quad \text{ואילו המשוואה של המשיק השני היא}$$

$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$$

אף על פי שהדרך השנייה לפתרון הבעיה ארוכה בהרבה מהדרך הראשונה, הכרתה עשויה לסייע לכם בעתיד.

עקרונות הפתרון ג'.

ישר ℓ משיק למעגל $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25$ ומקביל לישר $3x + 4y = 0$ אך ורק אם הוא מקיים את שני התנאים הבאים: (א) הישר ℓ מיוצג על ידי משוואה כללית מן הצורה הבאה: $3x + 4y + c = 0$; (ב) המרחק בין מרכז המעגל לישר ℓ ולמעגל הנתון שווה לרדיוס המעגל. עליכם להגיע למשוואה הבאה:

$$\frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + c|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5$$

כאשר תפתרו את המשוואה האחרונה תקבלו כי

$$c = 3 \text{ או } c = -47$$

מכאן תגיעו אל התשובה הרשומה לעיל.

בעיה 16. הנקודה $M(10, 4)$ היא אמצע המיתר המחבר את שתי נקודות הנמצאות על

אליפסה שמשוואתה $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{25} = 1$. מצאו את השיעורים של קצוות המיתר.

עקרונות הפתרון.

אם תסמנו את קצוות המיתר ב- $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$, תוכלו להמשיך מכאן בדרך הבאה:

הרכיבו מערכת של ארבע משוואות עם ארבעה הנעלמים הבאים: x_1, y_1, x_2, y_2 .

את שתי המשוואות הראשונות הרכיבו בהסתמך על כך שהנקודות A ו- B נמצאות על

האליפסה שמשוואתה $1 = \frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{25}$. את שתי המשוואות הבאות הרכיבו בהסתמך על

כך שהנקודה $M(10, 4)$ היא אמצע הקטע AB . עליכם לקבל את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{625} + \frac{y_1^2}{25} = 1 \\ \frac{x_2^2}{625} + \frac{y_2^2}{25} = 1 \\ \frac{x_1 + x_2}{2} = 10 \\ \frac{y_1 + y_2}{2} = 4 \end{cases} \quad (16.1)$$

מכאן תוכלו להמשיך בשתי הדרכים הבאות:

המשך א'

במשוואה השלישית של המערכת האחרונה בודדו את x_2 , ובמשוואה הרביעית של

מערכת זו בודדו את y_2 ; לאחר מכן הציבו במשוואה השנייה של המערכת לפי המשוואות

שיתקבלו מהמשוואות השלישית והרביעית. עליכם לקבל את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{625} + \frac{y_1^2}{25} = 1 \\ \frac{(20-x_1)^2}{625} + \frac{(8-y_1)^2}{25} = 1 \\ x_2 = 20 - x_1 \\ y_2 = 8 - y_1 \end{cases} \quad (16.2)$$

פתרו את המערכת

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{625} + \frac{y_1^2}{25} = 1 \\ \frac{(20-x_1)^2}{625} + \frac{(8-y_1)^2}{25} = 1 \end{cases} \quad (16.3)$$

המורכבת משתי המשוואות הראשונות של מערכת (16.2) בדרך הבאה : החסירו מהמשוואה השנייה של מערכת (16.3) את המשוואה הראשונה שלה, ובודדו את x_1 (או את y_1) במשוואה אשר תתקבל. לאחר מכן הציבו לפי התוצאה אשר תקבלו במשוואה הראשונה של המערכת המדוברת. תקבלו משוואה ריבועית עם הנעלם y_1 (או עם הנעלם x_1). אני מקווה שמכאן תוכלו להמשיך בעצמכם.

המשך ב'.

מצאו את השיפוע של הישר AB בדרך הבאה :
 החסירו מהמשוואה השנייה של המערכת (16.1) את המשוואה הראשונה שלה. תקבלו את המשוואה הבאה :

$$\frac{x_2^2 - x_1^2}{625} + \frac{y_2^2 - y_1^2}{25} = 0$$

משוואה זו שקולה למשוואה הבאה :

$$\frac{(y_2 - y_1)(y_2 + y_1)}{25} = -\frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{625} \quad (16.4)$$

המשוואה השלישית במערכת (16.1) שקולה למשוואה הבאה :

$$x_2 + x_1 = 20 \quad (16.5)$$

המשוואה הרביעית במערכת (16.1) שקולה למשוואה הבאה :

$$y_2 + y_1 = 8 \quad (16.6)$$

הציבו במשוואה (16.4) לפי משוואות (16.5) ו-(16.6). תקבלו את המשוואה הבאה :

$$\frac{8(y_2 - y_1)}{25} = -\frac{20(x_2 - x_1)}{625}$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה הבאה:

$$y_2 - y_1 = -\frac{x_2 - x_1}{10}$$

כאשר תחלקו את המשוואה האחרונה ב- $(x_2 - x_1)$, תקבלו:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{1}{10}$$

מכאן עליכם להסיק כי:

$$m_{AB} = -0.1 \quad (16.7)$$

לאחר שתקבלו את שוויון (16.7) יהיו ברשותכם השיפוע של הישר AB והשיעורים של אחת הנקודות הנמצאות עליו. תוכלו למצוא את משוואת הישר AB ולאחר מכן את השיעורים של הנקודות A ו- B כשיעורי נקודות החיתוך של ישר זה עם האליפסה הנתונה.

לאמתו של דבר עליכם עוד להבהיר כי הנקודה M היא לא אמצע המיתר של האליפסה המונח על הישר $x = 10$.
תשובה: $(0, 5)$, $(20, 3)$.

בעיה 17. באליפסה שמשוואתה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ חסום מלבן. נתון כי צירי האליפסה לא שווים זה לזה.¹ הוכיחו שכל צלע של המלבן הנתון מקבילה לאחד מצירי האליפסה.

¹ כלומר נתון כי האליפסה אינה מעגל.

עקרונות הפתרון.

ראשית הוכיחו את הטענה הבאה:

עבור כל נקודה שנמצאת בתוך האליפסה שמשוואתה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ואינה מתלכדת עם ראשית הצירים, קיים לא יותר מאשר מיתר אחד שהנקודה היא אמצעו. (17.1)

לאמתו של דבר אפשר להוכיח (אך אין בזה צורך עבור פתרון הבעיה הנוכחית) כי

עבור כל נקודה שנמצאת בתוך האליפסה שמשוואתה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ואינה מתלכדת עם ראשית הצירים, קיים מיתר אחד ויחיד שהנקודה היא אמצעו.

נציין גם שאם נוציא מטענה (17.1) את הדרישה שלפיה הנקודה הנזכרת בטענה זו נמצאת בתוך האליפסה – שוב נקבל טענה נכונה.

כדי להוכיח את טענה (17.1) התבוננו בנקודה שרירותית M הנמצאת בתוך האליפסה הנתונה ותניחו שאחד מקצוותיו של מיתר שהנקודה M היא אמצעו נמצא בנקודה (x_1, y_1) והקצה השני – בנקודה (x_2, y_2) . לאחר מכן הוכיחו כי מתקיים:

$$\frac{(y_2 - y_1)(y_1 + y_2)}{b^2} = -\frac{(x_2 - x_1)(x_1 + x_2)}{a^2}$$

אם תתקשו בכך, קראו את הנאמר בפתרון הבעיה הקודמת.

בהסתמך על השוויון האחרון ועל כך שנקודה M היא אמצע הקטע המחבר את הנקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) , הוכיחו כי מתקיים:

$$\frac{(y_2 - y_1)y_M}{b^2} = -\frac{(x_2 - x_1)x_M}{a^2} \quad (17.2)$$

לאחר שתוכיחו את שוויון (17.2), התבוננו במקרים הבאים: (א) מתקיים: $x_1 = x_2$

, $y_M \neq 0$ (ב) מתקיים: $x_1 \neq x_2$ וגם $y_M \neq 0$; (ג) מתקיים: $y_M = 0$, $x_M \neq 0$

הוכיחו בעזרת שוויון (17.2) כי אין אף מיתר של האליפסה שעבורו מתקיים $x_1 = x_2$

$$y_M \neq 0,$$

במקרה שבו מתקיים $x_1 \neq x_2$ וגם $y_M \neq 0$, תקבלו משוויון (17.2) את השוויון הבא:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{b^2 x_M}{a^2 y_M}$$

לאחר מכן היעזרו בכך שקיים ישר אחד ויחיד ששיפעו שווה ל- $-\frac{b^2 x_M}{a^2 y_M}$ ואשר עובר דרך

נקודה M נתונה.

נציין שעליכם גם להוכיח שאם מתקיים $x_M \neq 0, y_M = 0$, אז המיתר באליפסה הנתונה

שהנקודה M היא אמצעו נמצא על הישר שמשוואתו $x = x_M$. גם את זה תוכלו להוכיח

בעזרת שוויון (17.2).

לאחר שתוכיחו את טענה (17.1) תוכלו להוכיח כי

(17.3) נקודת המפגש של אלכסוני המלבן הנתון מתלכדת עם ראשית הצירים.

לאחר שתוכיחו את טענה (17.3), עליכם להיעזר בכך שקודקודי המלבן הנתון הם נקודות

משותפות לאליפסה הנתונה ולמעגל כלשהו שמרכזו נמצא בראשית הצירים². התבוננו

במערכת הבאה:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases} \quad (17.4)$$

וגם במערכת הבאה:

$$\begin{cases} \frac{u}{a^2} + \frac{v}{b^2} = 1 \\ u + v = R^2 \end{cases} \quad (17.5)$$

² קודקודיו של כל מלבן נמצאים על אותו מעגל שמרכזו הוא נקודת המפגש של אלכסוני המלבן, מכיוון שאלכסוני המלבן שווים זה לזה וחוצים זה את זה.

(את המערכת האחרונה מקבלים ממערכת (17.4) בעזרת ההצבה הבאה: $y^2 = v$, $x^2 = u$). הוכיחו כי למערכת (17.5) יש פתרון יחיד. לאחר מכן הראו שאם זוג המספרים הסדור (u_0, v_0) הוא פתרון של מערכת משוואות זו, אז

א) למערכת (17.4) יש ארבעה פתרונות שונים זה מזה אך ורק אם מתקיים: $u_0 > 0$ וגם $v_0 > 0$;

ב) אם מתקיים: $u_0 > 0$ וגם $v_0 > 0$, אז פתרונות המערכת (17.4) הם: $(\sqrt{u_0}, \sqrt{v_0})$, $(-\sqrt{u_0}, \sqrt{v_0})$, $(\sqrt{u_0}, -\sqrt{v_0})$ ו- $(-\sqrt{u_0}, -\sqrt{v_0})$.

בעיה 18. הוכיחו כי לא קיימת על האליפסה $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ אף נקודה שממנה רואים

בזווית ישרה את הקטע המחבר את הנקודות $A(-7, 0)$ ו- $B(7, 0)$.

עקרונות הפתרון.

הוכיחו כי המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמן רואים את הקטע AB בזווית ישרה הוא מעגל (להוציא הנקודות A ו- B) שמשוואתו $x^2 + y^2 = 49$ (ראו פרק 12). לאחר מכן הראו כי למערכת המורכבת מהמשוואה האחרונה וממשוואת האליפסה הנתונה אין אף פתרון.

בעיה 19. המרובע $ABCO$ הוא טרפז שווה שוקיים, והצלעות AB ו- CO הן בסיסיו. הנקודה O היא ראשית הצירים. הבסיס CO של הטרפז גדול פי שלושה מהבסיס AB . קודקוד A של הטרפז $ABCO$ נמצא במרחקים שווים מן הישר $x = -2$ ומן הנקודה $(2, 0)$, קודקוד C נמצא על ציר ה- x מימין לנקודה O . מצאו את המקום הגיאומטרי של נקודות מפגש האלכסונים בטרפזים המקיימים את התנאים הנ"ל.

עקרונות הפתרון.

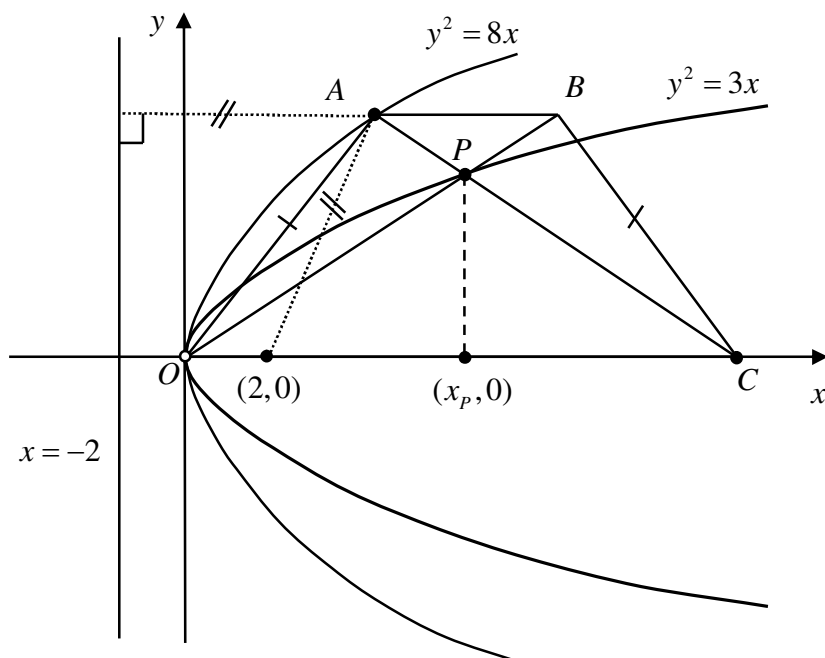
סמנו ב- P את נקודת מפגש האלכסונים בטרפז $ABCO$. הרכיבו מערכת של חמש משוואות עם ששת הנעלמים הבאים: $x_C, y_C, x_A, y_A, x_P, y_P$. עליכם לקבל את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} y_A^2 = 8x_A \\ y_C = 0 \\ x_P = \frac{3x_A + x_C}{4} \\ y_P = \frac{3y_A + y_C}{4} \\ x_C = 2x_P \end{cases}$$

הציבו במשוואה השלישית של מערכת זו לפי המשוואה החמישית שלה, ובמשוואה הרביעית לפי המשוואה השנייה. תקבלו את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} y_A^2 = 8x_A \\ y_C = 0 \\ x_P = \frac{3x_A + 2x_P}{4} \\ y_P = \frac{3y_A}{4} \\ x_C = 2x_P \end{cases}$$

בודדו את x_A במשוואה השלישית של המערכת האחרונה ואת y_A במשוואה הרביעית של המערכת. לאחר מכן הציבו לפי התוצאות שתקבלו במשוואה הראשונה של המערכת. בדרך זו תקבלו את המשוואה של המקום הגיאומטרי המדובר.



תשובה: פרבולה $y^2 = 3x$ (להוציא ראשית הצירים).

בעיה 20. נתון מלבן שאורכו 8 ס"מ ורוחבו 6 ס"מ. מהו המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור שסכום ריבועי מרחקיהן מצלעות המלבן גדול ב- p ($p > 0$) מריבוע מרחקיהן מנקודת המפגש של אלכסוני המלבן.

עקרונות הפתרון.

בבעיה זו לא נתונה שום מערכת צירים. הבה נתבונן במערכת הצירים שבה קודקודי המלבן נמצאים בנקודות $(-4, -3)$, $(4, -3)$, $(4, 3)$, ו- $(-4, 3)$. במערכת צירים זו ציר ה- x חוצה את צלעות המלבן הנתון שאורכן 6 ס"מ, ציר ה- y חוצה את צלעות המלבן שאורכן 8 ס"מ, וראשית הצירים נמצאת בנקודת המפגש של אלכסוני המלבן. במערכת הצירים שבה בחרנו המקום הגיאומטרי המדובר הוא האוסף של כל הנקודות במישור המקיימות את המשוואה הבאה:

$$(x-4)^2 + (x+4)^2 + (y-3)^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 + p$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה הבאה:

$$x^2 + y^2 = p - 50$$

תשובה: אם $p > 50$, אז המקום הגיאומטרי הנתון הוא המעגל שמרכזו נמצא בנקודת מפגש אלכסוני המלבן; אם $p = 50$, אז המקום הגיאומטרי הנתון הוא נקודת מפגש אלכסוני המלבן; אם $0 < p < 50$ (לפי הנתון $p > 0$), אז המקום הגיאומטרי המדובר הוא קבוצה ריקה.

בעיה 21. מצאו את משוואת המקום הגיאומטרי של מרכזי המעגלים המשיקים לישר שמשוואתו $y = x$ ומקצים על ציר ה- y את הקטע שאורכו 2 יח'.

עקרונות הפתרון.

נסמן ב- P את מרכזו של מעגל שרירותי המקיים את כל התנאים הנזכרים בבעיה, נסמן ב- A את הנקודה שבה הישר שמשוואתו $y = x$ משיק למעגל זה, וב- B את נקודת החיתוך של המעגל ששיעור ה- y שלה גדול משיעור ה- y של נקודת החיתוך השנייה של המעגל עם ציר זה.

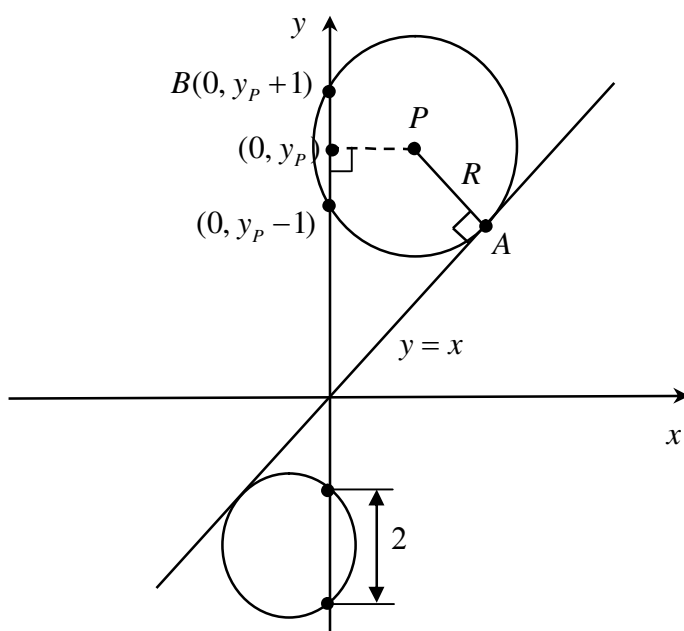
אילו היו נתונים השיעורים של הנקודות A ו- B , היינו יכולים למצוא את שיעורי הנקודה P . לכאורה עלינו להרכיב מערכת של חמש משוואות עם שישה הנעלמים הבאים: $x_P, y_P, x_A, y_A, x_B, y_B$, אך אם ניעזר בנוסחה לחישוב מרחק בין נקודה לישר, נוכל להוציא את שיעורי הנקודה A מרשימת הנעלמים ולנסות להרכיב מערכת של שלוש משוואות עם ארבעה הנעלמים הבאים: x_P, y_P, x_B, y_B . את אחת המשוואות אפשר לרשום מיד: $x_B = 0$. מהנאמר נובע כי בשלב הבא של פתרון הבעיה יש להרכיב שתי משוואות. לעומת זאת, בהרבה בעיות שבהן נזכרים מעגלים שרדיוסיהם משתנים כאשר הנקודה P נעה לאורך המקום הגיאומטרי עדיף להוסיף את הרדיוסים אל קבוצת הנעלמים.

לכן סמנו ב- R את רדיוס המעגל, והרכיבו מערכת של ארבע משוואות עם חמשת הנעלמים הבאים: x_P, y_P, x_B, y_B, R . כפי שכבר אמרנו, את אחת המשוואות אפשר לרשום מיד.

זאת המשוואה הבאה: $x_B = 0$. נותר לכם להרכיב שלוש משוואות. עליכם להגיע למערכת הבאה:

$$\begin{cases} \frac{|x_P - y_P|}{\sqrt{2}} = R \\ (x_B - x_P)^2 + (y_B - y_P)^2 = R^2 \\ x_B = 0 \\ y_B = y_P + 1 \end{cases}$$

או למערכת השקולה לה.



על סמך מערכת זו תוכלו לקבל את המשוואה הבאה של המקום הגיאומטרי המדובר:

$$x_P^2 + 1 = \frac{(x_P - y_P)^2}{2}$$

המשוואה האחרונה שקולה למשוואה הבאה:

$$x_P^2 + 2x_P y_P - y_P^2 = -2$$

תשובה: $x^2 + 2xy - y^2 = -2$

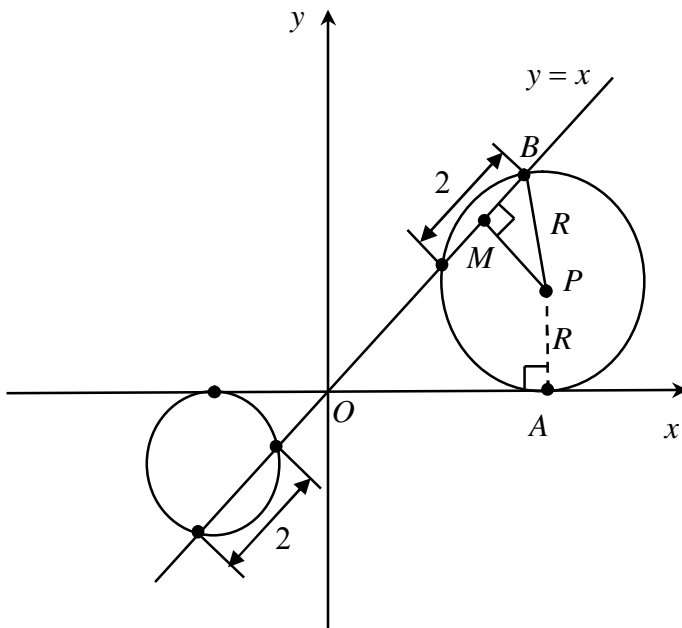
בעיה 22. מצאו את משוואת המקום הגיאומטרי של מרכזי המעגלים המשיקים לציר ה- x ומקצים על ישר שמשוואתו $y = x$ קטע שאורכו 2 יח'.

עקרונות הפתרון.

חיברתי בעיה זו כדי להדגים שוב כיצד בעזרת שימוש בתכונות של אורכי קטעים ובנוסחאות למרחקים אפשר לעתים להקטין את מספר הנעלמים שעבורם צריך להרכיב משוואות שבעזרתן אפשר למצוא את המשוואה של מקום גיאומטרי.

התבוננו בציור שלהלן ונסו להרכיב מערכת של שתי משוואות עם שלושה הנעלמים

הבאים: y_P, x_P, R .



לשם כך היעזרו בנוסחה לחישוב מרחק בין נקודה לישר ובשוויון

$$BM^2 + MP^2 = BP^2$$

אשר מתקיים לפי משפט פיתגורס. עליכם להגיע למערכת הבאה:

$$\begin{cases} |y_p| = R \\ 1^2 + \left(\frac{|x_p - y_p|}{\sqrt{2}} \right)^2 = R^2 \end{cases}$$

למשוואה הראשונה במערכת זו תוכלו להגיע בלי להשתמש בנוסחה לחישוב מרחק בין נקודה לישר.

$$x^2 - 2xy - y^2 = -2 \quad \text{תשובה:}$$

הערה. אם בציור האחרון נסובב את צירי השיעורים סביב ראשית הצירים O בזווית 135° בניגוד לכיוון השעון, נקבל את הבעיה הקודמת. נסמן ב- X את השיעור הראשון במערכת הצירים אשר נבנתה על ידי הסיבוב המתואר לעיל. את השיעור השני במערכת זו נסמן ב- Y . בהסתמך על התשובה לבעיה 21 אפשר לרשום את המשוואה הבאה של המקום הגיאומטרי המתואר בבעיה 22:

$$X^2 + 2XY - Y^2 = -2 \quad (22.1)$$

אם X_E הוא השיעור הראשון של נקודה E במערכת הצירים החדשה, ו- Y_E הוא השיעור השני של הנקודה במערכת צירים זו, אז מהם שיעורי הנקודה E במערכת הצירים המקורית? מהם השיעורים x_E ו- y_E של הנקודה E ?

כדי לענות על שאלה זו סובבו את הווקטור OE סביב ראשית הצירים O בזווית 135° בכיוון השעון. סמנו ב- F את סוף הווקטור אשר יתקבל באמצעות הסיבוב, וענו על השאלה הבאה: מהו קשר בין שיעורי נקודה E במערכת הצירים החדשה לבין שיעורי נקודה F במערכת הצירים המקורית? התשובה לשאלה זו היא:

$$X_E = x_F, \quad Y_E = y_F,$$

מכאן

$$X_E + iY_E = [\cos(-135^\circ) + i\sin(-135^\circ)](x_E + iy_E)$$

על סמך השוויון האחרון מקבלים כי:

$$X_E = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x_E - y_E), Y_E = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x_E + y_E)$$

כאשר תציבו במשוואה (22.1) לפי השוויונים

$$X = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x - y), X = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)$$

תקבלו משוואה השקולה למשוואה $x^2 - 2xy - y^2 = -2$ הרשומה בתשובה לבעיה 20.

מדוע חשוב לי לציין זאת?

כדי להזכיר שתמיד יש מקום להתפתחות נוספת.